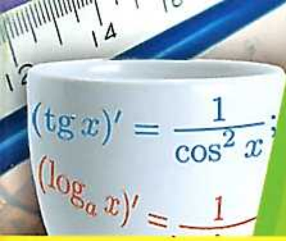


ГИА-9

ГИА-9

Под редакцией Ф.Ф. Лысенко,
С.Ю. Кулабухова

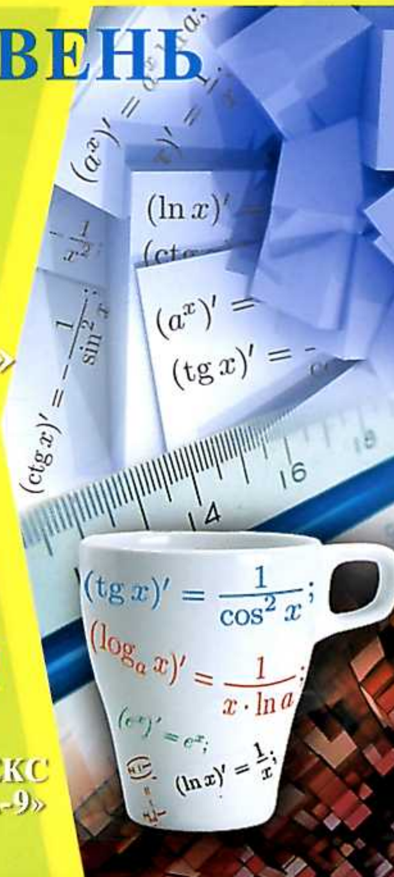
МАТЕМАТИКА

БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ

ГИА-9

ПОСОБИЕ ДЛЯ «ЧАЙНИКОВ»

Часть 2



ЛЕГИОН ТМ

9 КЛАСС

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС
«МАТЕМАТИКА. ПОДГОТОВКА К ГИА-9»

Учебные пособия издательства «Легион» допущены к использованию в образовательном процессе приказом Минобрнауки России № 729 от 14.12.2009

Учебно-методический комплекс «Математика. Подготовка к ГИА-9»

Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова

МАТЕМАТИКА

БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ ГИА-9
ПОСОБИЕ ДЛЯ «ЧАЙНИКОВ»

Часть 2

Учебно-методическое пособие

TM

ЛЕГИОН
Ростов-на-Дону
2012

ББК 22.1
М 34

Рецензенты:

Евич Л. Н. — кандидат физико-математических наук, доцент

Ольховая Л. С. — учитель высшей категории

Авторский коллектив:

Иванов С. О., Ковалевская А. С., Войта Е. А., Резникова Н. М., Ханин Д. И.

М 34 **Математика. Базовый уровень ГИА-9. Пособие для «чайников». Часть 2** / Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. — Ростов-на-Дону: Легион, 2012. — 160 с. — (ГИА-9)

ISBN 978-5-9966-0240-7

Материал, представленный в этой книге, предназначен для **формирования устойчивых навыков при решении задач базового уровня** на ГИА-9 по математике. Воспользовавшись пособием, можно развить навыки безошибочного решения заданий первой части предстоящего экзамена и сэкономить время для решения более сложных задач.

Пособие состоит из 3 глав, каждая из которых включает в себя необходимую теоретическую информацию, разбор решений типовых задач, а также варианты для самостоятельного решения. Кроме того, в пособии приведено **10 обобщающих тренировочных тестов**, включающих задания по всем темам экзамена, рассмотренным в книге.

Предлагаемое издание адресовано учащимся 9-х классов общеобразовательных учреждений и учителям математики.

Книга является частью учебно-методического комплекса **«Математика. Подготовка к ГИА-9»**, состоящего из шести пособий («Математика. 9 класс. Подготовка к ГИА-2013», «Математика. Базовый уровень ГИА-9. Пособие для „чайников“. Часть 1», «Математика. 9 класс. Тематические тесты для подготовки к ГИА-2013» и др.)

ББК 22.1

ISBN 978-5-9966-0240-7

Оглавление

От авторов

Книга «Математика. Базовый уровень ГИА-9. Пособие для „чайников“. Часть 2» входит в учебно-методический комплекс «Математика. Подготовка к ГИА-9», выпускаемый издательством «Легион». Пособие предназначено для подготовки девятиклассников к ГИА (государственной итоговой аттестации) и будет полезно в течение всего учебного года. Оно адресовано учащимся 9-х классов общеобразовательных учреждений и учителям математики.

Материал, представленный в этой книге, служит для формирования **устойчивых навыков при решении задач базового уровня**. Воспользовавшись этой книгой, школьник научится безошибочно выполнять наиболее простые задания экзамена по математике и таким образом сможет сэкономить время для решения более сложных задач.

Пособие состоит из 3 глав, каждая из которых включает в себя

- краткий теоретический минимум;
- разбор решений типовых задач, подобные которым учащимся предстоит выполнять на экзамене;
- варианты для самостоятельного решения.

Каждый вариант для самостоятельного решения в главах 1 – 2 (графики и функции, планиметрия) рассчитан на выполнение в течение 45 минут, в главе 3 (статистика) — в течение 15 минут.

Книгу завершают **10 обобщающих тренировочных тестов**, включающих задания по всем главам книги. Каждый тест рекомендуем выполнять в течение 40 – 50 минут, затем проверить правильность решения с помощью ответов, приведённых в конце пособия. Если ответы не совпадут, следует ещё раз решить задачу, а при необходимости найти подобную среди разобранных примеров.

Настоящее пособие составлено в соответствии со спецификацией и демонстрационным вариантом[1] ГИА 2012 года. Согласно спецификации, на рассмотренные в данной книге темы приходится 10 заданий первой части экзаменационной работы. Отметим, что для удовлетворительной сдачи экзамена необходимо правильно решить любые 8 заданий.

Темы, не вошедшие в данное пособие, представлены в книге «Математика. Базовый уровень ГИА-9. Пособие для „чайников". Часть 1».

Обсудить пособия издательства «Легион», оставить свои замечания и предложения можно на официальном форуме издательства `http://legionr.rossite.org`

Комплекс «Математика. Подготовка к ГИА»

Перечислим книги, входящие в комплекс «Математика. Подготовка к ГИА-9», выпускаемый издательством «Легион»:

- Математика. 9 класс. Подготовка к ГИА-2013.
  Основная книга для подготовки к ГИА-9, включающая необходимый теоретический минимум, сборник авторских тестов, составленных по последней спецификации ГИА, а также сборник задач.

[1]Находятся на сайте Федерального института педагогических измерений `http://www.fipi.ru`

- Математика. Решебник. 9 класс. Подготовка к ГИА-2013. *Книга содержит решения всех тестовых заданий повышенного уровня сложности и всех задач из раздела «Задачник» пособия «Математика. 9 класс. Подготовка к ГИА-2013»*

- Математика. 9 класс. Тематические тесты для подготовки к ГИА-2013. Алгебра, геометрия, теория вероятностей и статистика.
Сборник тестов, каждый из которых предназначен для проверки уровня усвоения определённого раздела программы по математике. Сборник охватывает все темы, отражённые в спецификации ГИА.

- Математика. 9 класс. Подготовка к ГИА-2013. Учебно-тренировочные тесты.
Сборник авторских тестов, составленных по последней спецификации ГИА. Дополняет книгу «Математика. 9 класс. Подготовка к ГИА-2013».

- Математика. Базовый уровень ГИА-9. Пособие для «чайников». Часть 1. *Пособие посвящено решению задач базового уровня сложности и включает темы «Числа и вычисления», «Алгебраические выражения», «Уравнения и неравенства», «Теория вероятностей», «Числовые последовательности».*

- Математика. Базовый уровень ГИА-9. Пособие для «чайников». Часть 2.

Желаем успехов на экзамене!

Глава 1. Графики и функции

Понятие графика. Простейшие задачи

ⓘ *Немного полезной информации*

График характеризует изменение некоторой величины (температуры, количества осадков, стоимости акций и т.п.) от времени. В простейших задачах с графиком нужно, как правило, найти

- наибольшее или наименьшее значение этой величины;
- разность между наибольшим и наименьшим её значениями;
- момент времени, когда величина примет какое-либо значение;
- ответ на другой, подобный этим, вопрос.

Главное при решении подобной задачи — внимательно прочитать условие и вопрос. При поиске ответа на этот вопрос надо прямо на графике провести недостающие линии, при необходимости дописать пропущенные числа (это касается «разметки» осей).

Иногда в этих заданиях употребляются фразы, обозначающие подобные вещи, например: «На рисунке показано изменение дневной температуры воздуха **на протяжении первых**

трёх недель мая» или «На рисунке показано изменение температуры воздуха **на протяжении первой и второй декад мая**». Декада — это 10 дней. Напомним значения ещё некоторых слов.

Полдень — 12.00, полночь — 24.00 или 00.00. Квартал — 3 месяца.

Задачи с решениями

Попробуем по одному и тому же графику решить несколько задач.

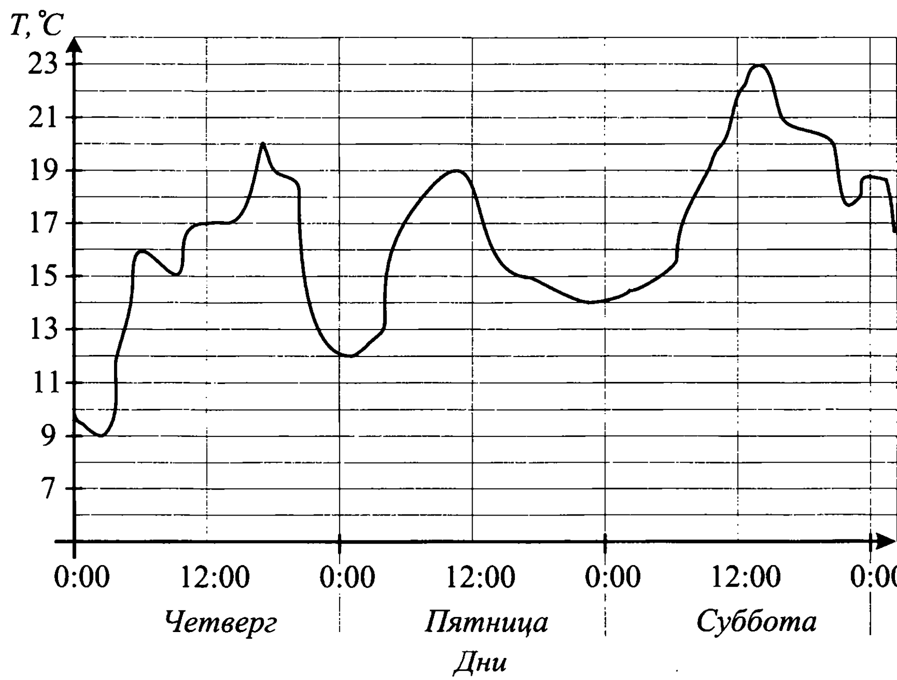


Рис. 1.

1. На графике (см. рис. 1) показано изменение температуры воздуха в некотором населённом пункте на протяжении трёх суток, начиная с 0 часов четверга. На оси абсцисс отмечается время суток в часах, на оси ординат — значение температуры в градусах Цельсия.

а) Определите по графику наименьшую температуру воздуха в ночь с пятницы на субботу (ночь длится с 18.00 до 6.00). Ответ дайте в градусах Цельсия.

б) Определите по рисунку разность между наибольшим и наименьшим значениями температуры воздуха в четверг. Ответ дайте в градусах Цельсия.

Решение.

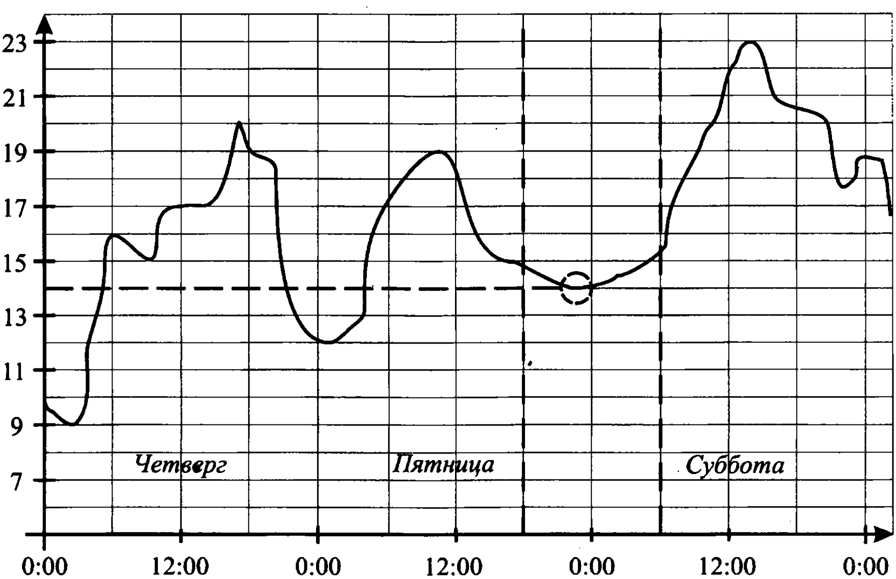


Рис. 2.

а) Прочитаем ещё раз задание: «Определите по графику наименьшую температуру воздуха в ночь с пятницы на субботу». На графике (см. рис. 2) отметим нужный промежуток времени (ночь с пятницы на субботу). Видим, что ответ 14 градусов.

Ответ: 14.

б) Прочитаем ещё раз задание: «Определите по рисунку разность между наибольшим и наименьшим значениями температуры воздуха в четверг». На графике (см. рис. 3) выделяем временной промежуток — четверг. Находим наименьшее значение 9 и наибольшее 20. Находим разность $20 - 9 = 11$.

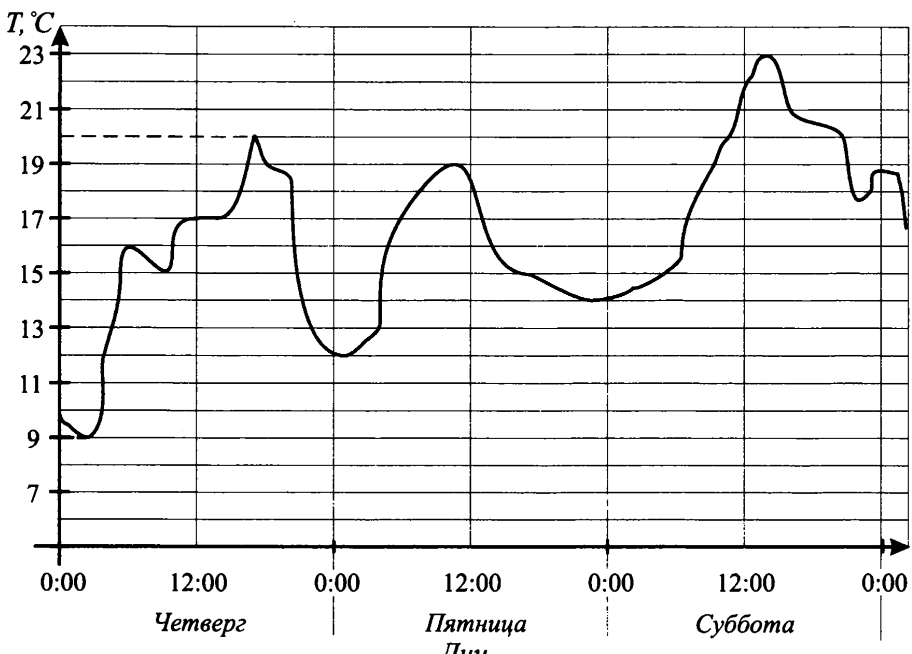


Рис. 3.

Ответ: 11.

2. На графике, изображённом на рисунке 4, жирными точками показано изменение биржевой стоимости акций горнодобывающей компании в первые две недели июля. По оси абсцисс отложены числа месяца, по оси ординат — стоимость одной акции в рублях. Для наглядности жирные точки соединены линией. 3 июля бизнесмен приобрёл 200 акций этой компании. 50 из них он продал 4 июля, а 13 июля — остальные 150. Сколько рублей потерял бизнесмен в результате этих операций?

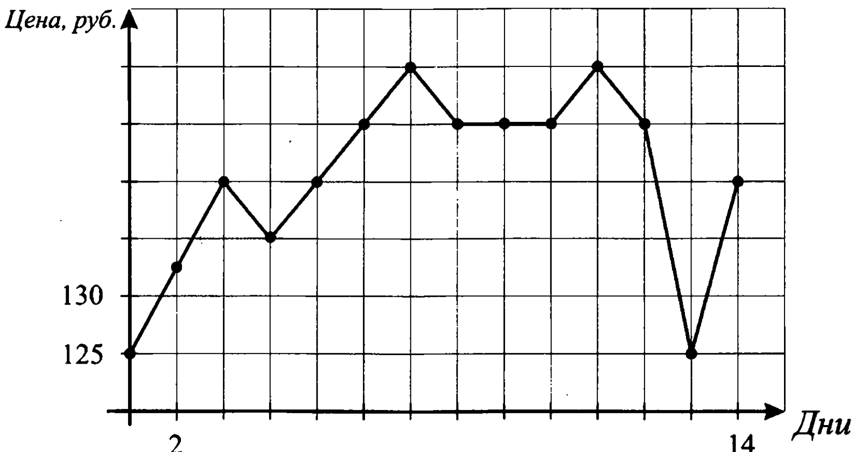


Рис. 4.

Решение.

Проставим на графике необходимые числа (дни и стоимость акций) (см. рис. 5).

3 июля бизнесмен приобрёл 200 акций по цене 140 рублей и заплатил $200 \cdot 140 = 28\,000$ (рублей). 50 акций он продал 4 июля по цене 135 рублей и получил $50 \cdot 135 = 6750$ (рублей), а 13 июля он продал остальные 150 акций по цене 125 рублей за акцию, получив при этом $150 \cdot 125 = 18\,750$ (рублей). Получил всего он $6750 + 18\,750 = 25\,500$ (рублей), заплатил 28 000 рублей. Найдём, сколько рублей потерял бизнесмен в результате этих операций: $28\,000 - 25\,500 = 2500$ (рублей).

Ответ: 2500.

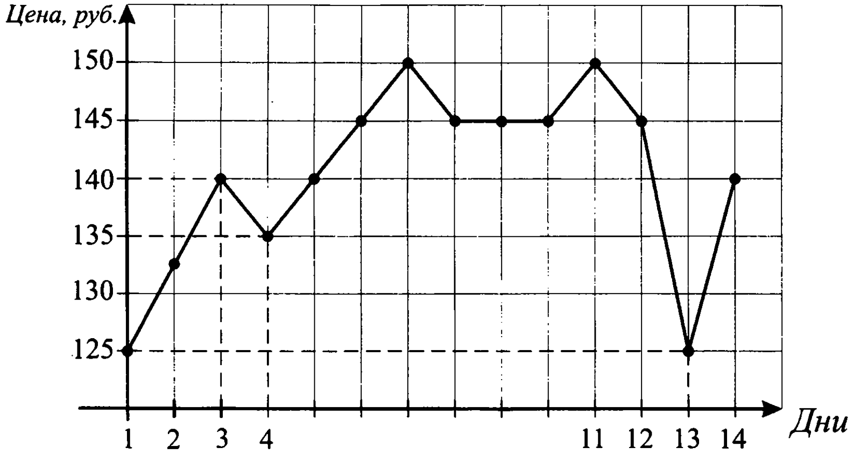


Рис. 5.

3. Первый посев семян огурцов рекомендуется проводить в мае при среднесуточной температуре воздуха не менее +8°C. На рисунке 6 жирными точками показана среднесуточная температура воздуха с 1 по 11 мая. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите, в течение скольких дней за этот период можно было производить посев огурцов.

Рис. 6.

Решение.

Выделим на графике необходимые дни и значения температуры воздуха (см. рис. 7).

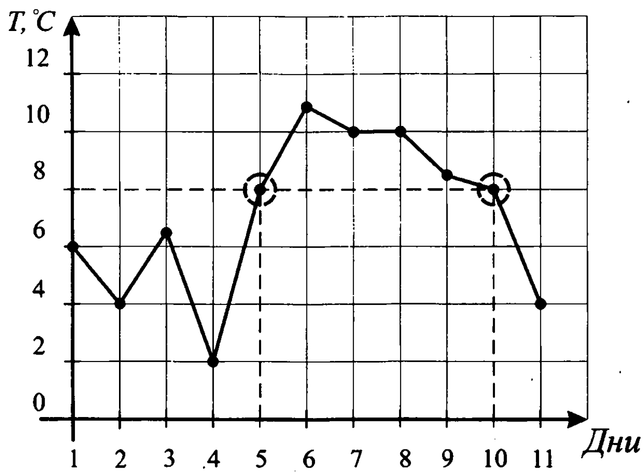


Рис. 7.

Среднесуточная температура воздуха в начале мае составляла не менее +8°С с 5 по 10 мая включительно, значит в эти дни можно было производить посев огурцов. Обратите внимание, что период с 5 по 10 мая включительно состоит из шести дней.

Ответ: 6.

ⓘ *Немного полезной информации*

Областью определения функции $y = f(x)$ называется множество всех значений аргумента x, для которых выражение $f(x)$ определено (имеет смысл). Например, область определения функций $y = x^2 + x + 1$ и $y = \sqrt[3]{x}$ — все действительные числа, область определения функции $y = \dfrac{1}{x-1}$ — все действительные числа, кроме 1 (так как при $x = 1$ знаменатель дроби $\dfrac{1}{x-1}$ равен нулю и выражение не имеет смысла), область определения функции $y = \sqrt{x}$ — все неотрицательные числа (то есть $x \geqslant 0$).

Каждая функция, заданная при помощи формулы, имеет в прямоугольной системе координат Oxy свой график. **Графиком функции** $y = f(x)$ называют множество точек координатной плоскости Oxy вида $(x; f(x))$, где x — любое число из области определения функции.

Часто встречаются задания, в которых необходимо установить соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают. Для решения таких заданий следует

- определить общий вид графика, задаваемого каждой формулой;

- если среди предложенных вариантов несколько графиков нужного типа, проверить соответствие формул и графиков по точкам.

Рассмотрим графики некоторых элементарных функций.

Прямая

График функций, заданных формулой вида $y = kx + b$, — прямая.

Рассмотрим разные случаи расположения прямой в зависимости от значений коэффициентов k и b в формуле (см. рис. 8).

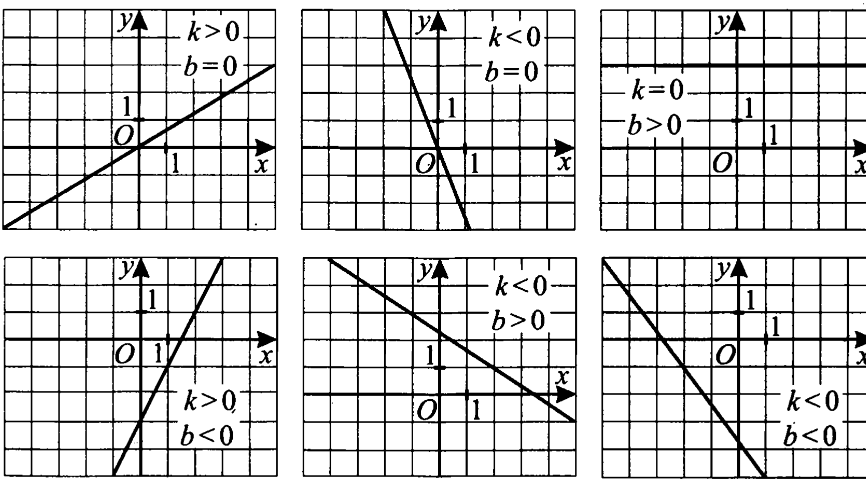


Рис. 8.

Коэффициент k определяет угол наклона прямой. При $k = 0$ функция имеет вид $y = b$, её график параллелен оси абсцисс (оси Ox). При $k > 0$ прямая уходит вправо-вверх: при возрастании x значение функции $y = kx+b$ также возрастает. При $k < 0$ прямая уходит вправо-вниз: при возрастании x значение функции $y = kx + b$ убывает.

Коэффициент b определяет, в каком месте график пересечёт ось ординат (ось Oy). При $b = 0$ получаем функцию $y = kx$. Её график — прямая, проходящая через начало координат. Действительно, точка $(0; 0)$ принадлежит графику функции $y = kx$, так как $0 = k \cdot 0$. При $b > 0$ функция пересекает ось ординат выше оси абсцисс, а при $b < 0$ — ниже оси абсцисс. Действительно, точке пересечения графика и оси ординат соответствует точка графика с абсциссой $x = 0$, то есть точка $(0; b)$. В зависимости от знака b эта точка находится выше или ниже оси абсцисс.

Задачи с решениями

4. Установите соответствие между графиками функций (см. рис. 9) и формулами, которые их задают.

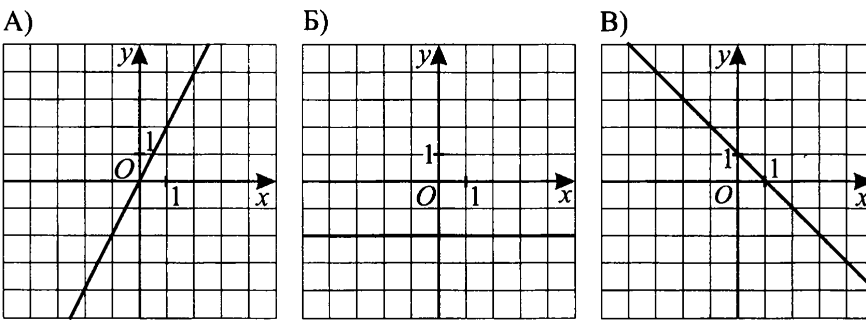


Рис. 9.

1) $y = -2x + 1$ 2) $y = 2x$ 3) $y = -x + 1$ 4) $y = -2$

Решение. Все три графика — прямые, то есть заданы формулами вида $y = kx + b$.

Для графика А) $b = 0$, так как прямая проходит через начало координат. Из предложенных вариантов ему соответствует формула $y = 2x$ (2).

График Б) параллелен оси абсцисс, поэтому $k = 0$, из предложенных вариантов ему соответствует формула $y = -2$ (4).

Для В) $k < 0$ и $b > 0$, то есть ему могут соответствовать формулы $y = -2x + 1$ (1) или $y = -x + 1$ (3). Найдём подходящую формулу по двум точкам. График В) проходит через точки плоскости с координатами $(0; 1)$ и $(1; 0)$. Подставим в

формулы значения координат этих точек:
для формулы 1 получаем, при $x = 0$, $y = 0 + 1 = 1$; при $x = 1$ $y = -2 + 1 = -1$, ей график соответствовать не может.
для 3 получаем $x = 0$, $y = 0 + 1 = 1$; при $x = 1$ $y = -1 + 1 = 0$, следовательно, график В) соответствует формуле 3.

Ответ:

А	Б	В
2	4	3

Замечание. Любая прямая задаётся двумя точками, поэтому для проверки соответствия формулы и графика достаточно подставить в формулу координаты двух точек графика (при условии, что формула задаёт прямую и график — тоже прямая).

Парабола

Графики функций, заданных формулами вида $y = ax^2 + bx + c$ или $y = a(x - m)^2 + n$, где $a \neq 0$, — парабола. Вершина параболы находится в точке с абсциссой, равной $m = -\dfrac{b}{2a}$, и в зависимости от знака параметра a и знака выражения $D = b^2 - 4ac$ график может принимать различный вид (см. рис. 10).

При $a > 0$ ветви параболы направлены вверх, при $a < 0$ — вниз. Знак дискриминанта D показывает, пересекает ли парабола ось абсцисс. При $D > 0$ парабола пересекает ось абсцисс дважды, при $D = 0$ — один раз (вершина параболы лежит на оси абсцисс). При $D < 0$ парабола не пересекает ось абсцисс.

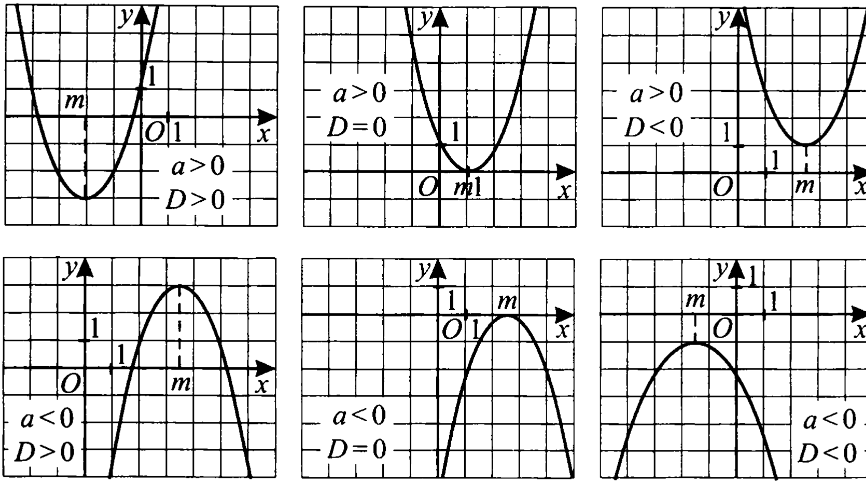


Рис. 10.

Задачи с решениями

5. Установите соответствие между графиками функций (см. рис. 11) и формулами, которые их задают.

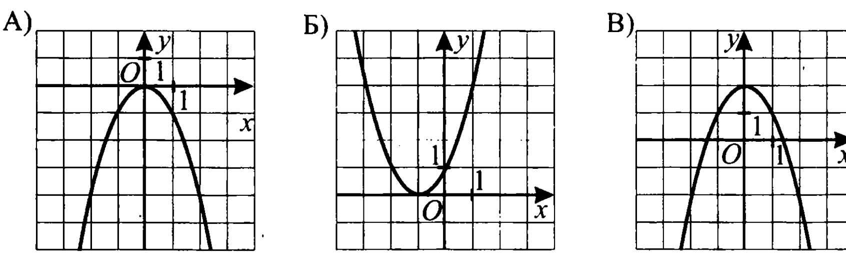


Рис. 11.

1) $y = -x^2 + 2$ 2) $y = (x+1)^2$

3) $y = (x-1)^2$ 4) $y = -x^2$

Решение. Все три графика — параболы, то есть заданы формулами вида $y = ax^2 + bx + x$ или $y = a(x - m)^2 + n$.

На графике А) ветви параболы направлены вниз, значит, параметр $a < 0$. Этому условию отвечают формулы 1 и 4, но так как график А) проходит через точку плоскости с координатами $(0; 0)$, а график, заданный формулой 1, через неё не проходит (при $x = 0$ $y = 2 \neq 0$), то графику А) соответствует формула 4.

На графике Б) ветви параболы направлены вверх, $a > 0$, и он может быть задан формулой 2 или 3, но так как вершина параболы лежит на оси Ox в точке с абсциссой $x = -1$, то $y(-1) = 0$. Формула 3 не подходит, так как для неё $y(-1) = (-1 - 1)^2 \neq 0$. Графику Б) соответствует формула 2: $y = (x + 1)^2$.

На графике В) ветви параболы направлены вниз, $a < 0$, и ему могут соответствовать формулы 1 и 4. Так как $y(0) = 2$, то формула 4 не подходит (в ней $y(0) = -0^2 = 0$), следовательно, график В) задаёт формула 1.

Ответ:

А	Б	В
4	2	1

Замечание. Для параболы при проверке соответствия графика одной из нескольких формул удобно использовать сравнение координат вершины параболы, изображённой на графике, и координат вершин парабол, задаваемых формулами. Если эти координаты для двух формул совпадают, следует выбирать ещё одну дополнительную точку графика для проверки.

ⓘ *Немного полезной информации*

Гипербола

График функции, заданной формулой вида $y = \frac{k}{x}$ или $y = \frac{k}{x-m} + n$, $k \neq 0$, — гипербола. Область определения функции, заданной формулой $y = \frac{k}{x}$, — все действительные числа, кроме 0, значит, график этой функции не пересекает ось ординат. Аналогично график, заданный $y = \frac{k}{x-m} + n$, не будет проходить ни через одну точку плоскости с абсциссой m (то есть не пересекает вертикальную прямую $x = m$).

В зависимости от значений, которые принимают параметры k, гипербола $y = \frac{k}{x}$ может быть по-разному расположена на декартовой плоскости. При $k > 0$ гипербола расположена в I и III четвертях, при $k < 0$ — во II и IV (см. рис. 12).

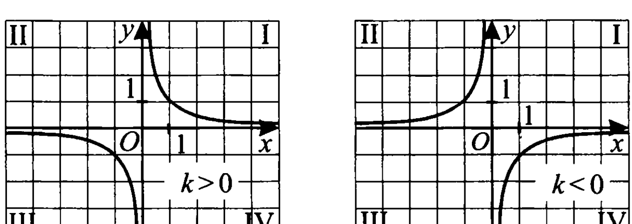


Рис. 12.

При наличии параметров m и n график гиперболы получается из графика $y = \dfrac{k}{x}$ параллельным переносом вправо вдоль оси Ox на m и вверх вдоль оси Oy на n (см. рис. 13).

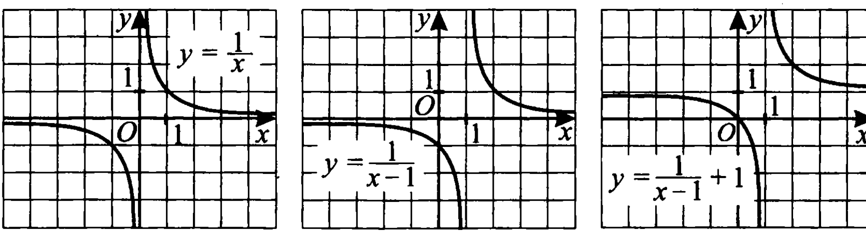


Рис. 13.

Пример 3. Установите соответствие между графиками функций (см. рис. 14) и формулами, которые их задают.

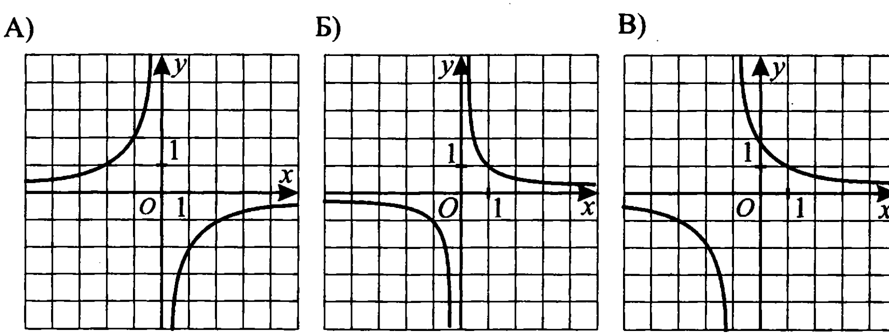


Рис. 14.

1) $y = -\dfrac{2}{x}$ 2) $y = \dfrac{2}{x+1}$ 3) $y = \dfrac{1}{x}$ 4) $y = -\dfrac{1}{x}$

Решение. Все три графика — гиперболы, то есть заданы формулами вида $y = \dfrac{k}{x}$ или $y = \dfrac{k}{x-m} + n$.

Для графика А) значение параметра $k < 0$, значит, он может быть задан формулами 1 или 4. Проверим точку $(1; -2)$, через которую проходит этот график. Формула номер 1: $y(1) = -\frac{2}{1} = -2$ — подходит. Формула номер 4: $y(1) = -\frac{1}{1} = -1 \neq -2$ — не подходит. Следовательно, из предложенных формул графику А) соответствует формула 1.

Для графика Б) $k > 0$, значит, он может быть задан формулами 2 или 3. Проверим точку $(-1; -1)$, через которую проходит этот график (точку $(1; 1)$ брать нецелесообразно, так как график В также проходит через неё). Формула номер 2: $y(-1) = -\frac{2}{-1+1}$ — не определено, поэтому не подходит. Формула номер 3: $y(-1) = \frac{1}{-1} = -1$ — подходит. Следовательно, из предложенных формул графику Б) соответствует формула 3.

Для графика В) $k > 0$, значит, он может быть задан формулами 2 или 3. Так как из них неиспользованной осталась только формула 2, то она и задаёт этот график.

Ответ:

А	Б	В
1	3	2

ⓘ *Немного полезной информации*

График функции корня

Рассмотрим графики функций квадратного и кубического корней. Областью определения функции, заданной формулой

$y = \sqrt{x}$, является $x \geqslant 0$. Областью определения функции, заданной формулой $y = \sqrt[3]{x}$, являются все действительные числа (см. рис. 15).

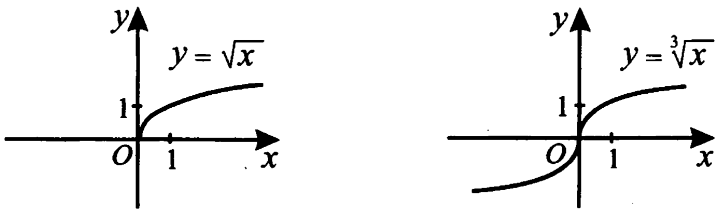


Рис. 15.

График функции, заданной формулой вида $y = \sqrt{x-p} + q$ получается из графика, заданного формулой $y = \sqrt{x}$, параллельным переносом вправо вдоль оси Ox на p и вверх вдоль оси Oy на q. Например, график функции $y = \sqrt{x-2}+1$ получается из графика $y = \sqrt{x}$ параллельным переносом вправо на 2 деления и на 1 вверх (см. рис. 16).

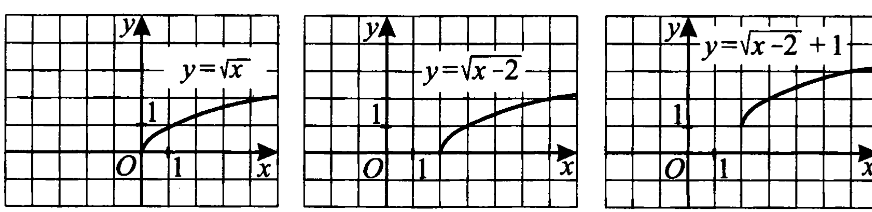


Рис. 16.

Пример 4. Установите соответствие между графиками функций (см. рис. 17) и формулами, которые их задают.

1) $y = \sqrt{x}$	2) $y = \sqrt{x} - 3$
3) $y = \sqrt{x+3}$	4) $y = \sqrt{x+1}$

Решение. Заметим, что графики А)–В) представляют собой смещённые графики функции $y = \sqrt{x}$, а потому зада-

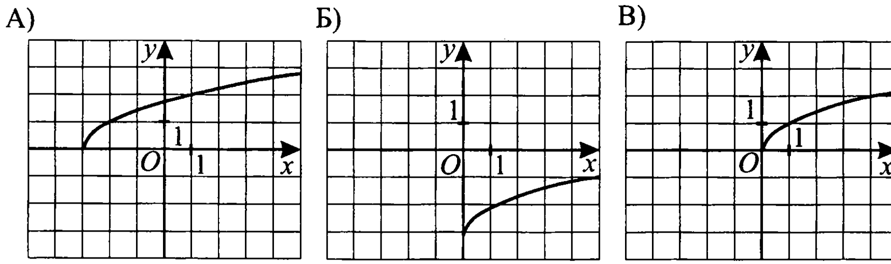


Рис. 17.

ются формулами вида $y = \sqrt{x-p} + q$.

График А) проходит через $(-3; 0)$ и задаётся формулой $y = \sqrt{x+3}$, так как из предложенных только она удовлетворяет соотношению $y(-3) = 0$.

График Б) проходит через $(0; -3)$ и задаётся формулой $y = \sqrt{x} - 3$, так как из предложенных только она удовлетворяет соотношению $y(0) = -3$.

График В) проходит через $(0; 0)$ и задаётся формулой $y = \sqrt{x}$, так как из предложенных только она удовлетворяет соотношению $y(0) = 0$.

Ответ:

А	Б	В
3	2	1

Замечание. Вообще говоря, подстановка координат одной точки в формулы может оказаться недостаточной (несколько формул превратятся в верные равенства) . Тогда надо подставить координаты ещё одной точки.

Рассмотрим теперь задания, содержащие графики разных видов.

6. Установите соответствие между графиками функций (см. рис. 18) и формулами, которые их задают.

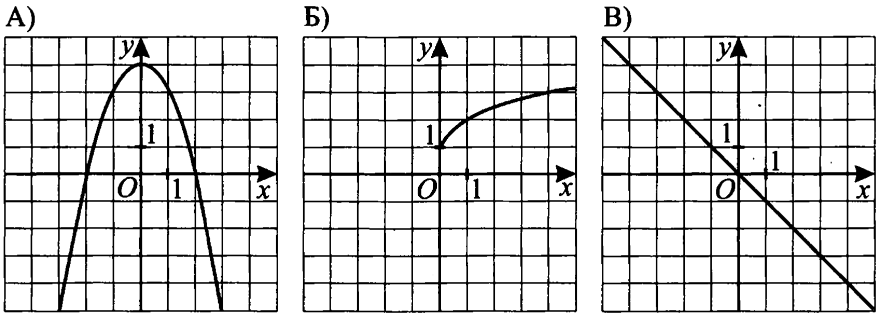


Рис. 18.

1) $y = -x^2 + 4$ 2) $y = -x^2 + 1$

3) $y = \sqrt{x} + 1$ 4) $y = -x$

Решение. График А) — парабола, ветви которой направлены вниз. Из предложенных формул только 1 и 2 задают такую параболу. Вершина параболы, заданной формулой 1, лежит в точке с координатами (0; 4), вершина параболы, заданной формулой 2, — в точке с координатами (0; 1). Вершина параболы А) лежит в точке (0; 4), значит, график А) задаётся формулой 1.

График Б) — смещённый график квадратного корня. Из предложенных вариантов ему может соответствовать только формула 3.

График В) — прямая. Из предложенных ему соответствует формула 4.

Ответ:

А	Б	В
1	3	4

7. Установите соответствие между графиками функций (см. рис. 19) и формулами, которые их задают.

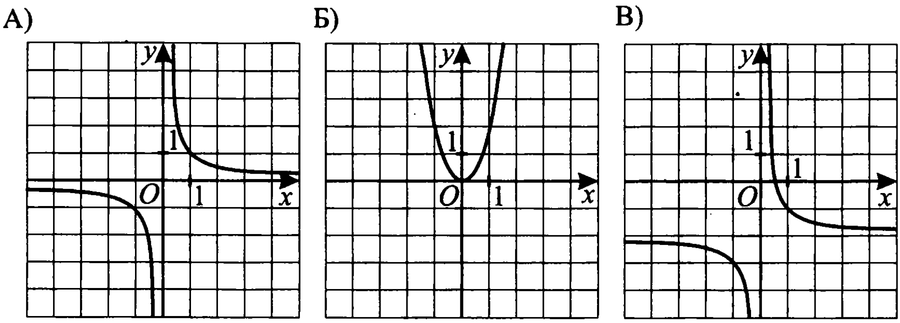


Рис. 19.

1) $y = \frac{1}{x} - 2$ 2) $y = x^2$ 3) $y = \frac{1}{x}$ 4) $y = 2x^2$

Решение. График А) — гипербола, задаваемая формулой вида $y = \frac{k}{x}$, $k > 0$. Значит, А) соответствует формула 3.

График Б) — парабола, ветви которой направлены вверх. Такую параболу задают формулы 2 или 4. Координаты вершины параболы Б) (0; 0) и координаты вершин парабол, задаваемых формулами, совпадают, поэтому рассмотрим дополнительно точку графика Б) с координатами (1; 2) и подставим значения её координат в формулы. Для формулы 2 при $x = 1$ $y = 1 \neq 2$, следовательно, график Б) задаётся формулой 4.

График В) — гипербола. Из оставшихся формул подходит только формула 1.

Ответ:

А	Б	В
3	4	1

Пересечение графиков

ⓘ *Немного полезной информации*

Для того чтобы решить задания, в которых требуется найти координаты точки пересечения графиков (заданных уравнениями), удовлетворяющей определённому условию, нужно

- составить и решить систему уравнений, задающих графики, тем самым найдя все их точки пересечения;
- определить условия, отличающие искомую точку от других (например, знак абсциссы), выбрать среди всех найденных точек пересечения искомую.

Задачи с решениями

8. На рисунке 20 изображены графики функций $y = x^2 - 3$ и $y = x - 1$. Вычислите координаты точки B.

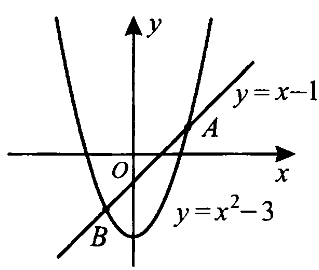


Рис. 20.

Решение.

Решим систему уравнений $\begin{cases} y = x^2 - 3, \\ y = x - 1. \end{cases}$

$x^2 - 3 = x - 1$; $x^2 - x - 2 = 0$; $x_1 = 2$, $x_2 = -1$; $y_1 = 1$, $y_2 = -2$.

Таким образом, решениями системы являются точки $(2; 1)$ и $(-1; -2)$.

Точка B расположена слева от оси Oy, точка A — справа, следовательно, абсцисса точки B — отрицательное число, в то время как абсцисса точки A — положительное.

Среди найденных точек пересечения выбираем точку с отрицательной абсциссой: $(-1; -2)$.

Ответ: $(-1; -2)$.

9. На рисунке 21 изображены графики функций $y = 2x + 5$ и $y = 4 - (x + 2)^2$. Вычислите координаты точки A.

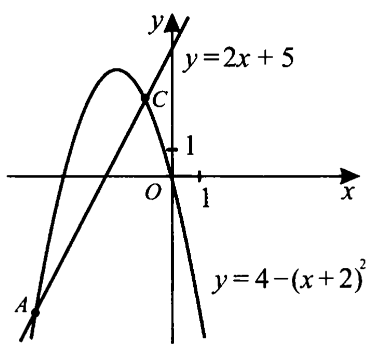


Рис. 21.

Решение.

а) Решим систему уравнений $\begin{cases} y = 2x + 5, \\ y = 4 - (x + 2)^2. \end{cases}$

$2x + 5 = 4 - (x + 2)^2$; $2x + 1 + x^2 + 4x + 4 = 0$; $x^2 + 6x + 5 = 0$; $x_1 = -5$, $x_2 = -1$; $y_1 = -5$, $y_2 = 3$.

Таким образом, решениями системы являются точки $(-5; -5)$ и $(-1; 3)$.

б) Точка A расположена ниже оси Ox, точка C — выше, следовательно, ордината точки A — отрицательное число, ордината точки C — положительное.

в) Среди найденных точек пересечения выбираем точку с отрицательной ординатой: $(-5; -5)$.

Ответ: $(-5; -5)$.

Замечание. Можно было бы рассуждать иначе: точка A левее точки C, поэтому абсцисса точки A меньше абсциссы точки C. Из точек $(-5; -5)$ и $(-1; 3)$ абсцисса точки $(-5; -5)$ меньше, поэтому точка $(-5; -5)$ является искомой.

Варианты для самостоятельного решения

Вариант 1

1. Установите соответствие между графиками функций (см. рис. 22) и формулами, которые их задают.

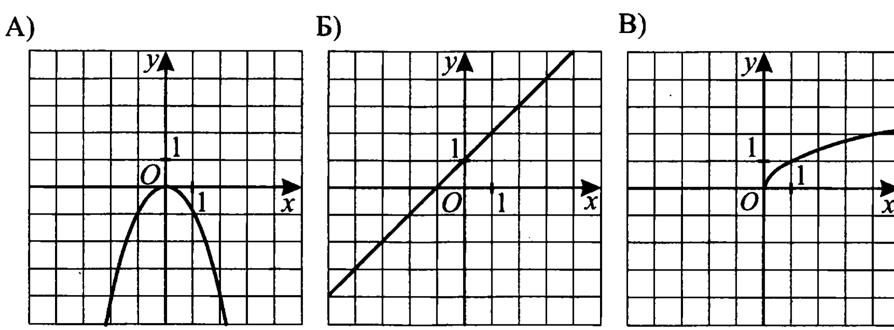


Рис. 22.

1) $y = x + 1$ 2) $y = x - 1$ 3) $y = \sqrt{x}$ 4) $y = -x^2$

Ответ:

А	Б	В

2. На рисунке 23 изображены графики функций $y = -x - 3$ и $y = -x^2 + 3$. Вычислите координаты точки A.

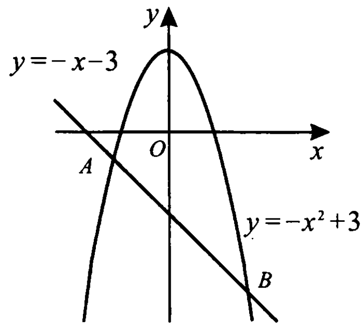


Рис. 23.

3. На рисунке 24 показано изменение температуры воздуха на протяжении суток. По горизонтали указывается время суток, по вертикали — значения температуры в градусах Цельсия.

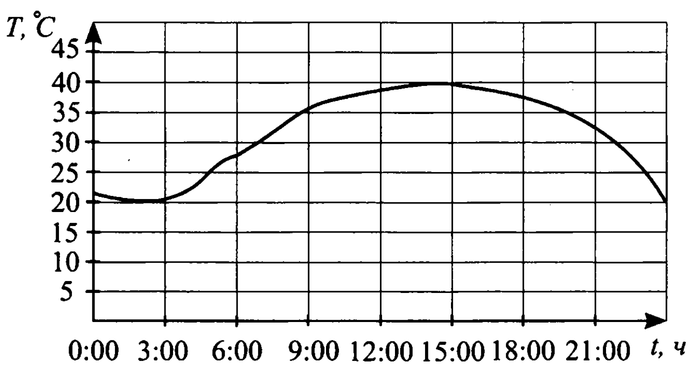


Рис. 24.

Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей температурами воздуха за эти сутки. Ответ дайте в градусах Цельсия.

4. Установите соответствие между графиками функций (см. рис. 25) и формулами, которые их задают.

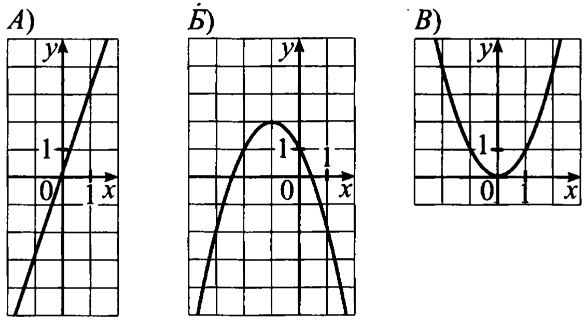


Рис. 25.

1) $y = \dfrac{2}{x}$ 2) $y = x^2$ 3) $y = -(x+1)^2 + 2$ 4) $y = 3x$

Ответ:

А	Б	В

5. Используя рисунок 26, решите систему уравнений $\begin{cases} y = -3x + 4, \\ y = 2x - 6. \end{cases}$

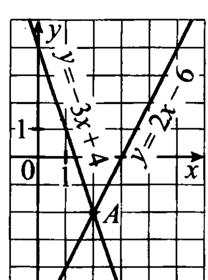


Рис. 26.

6. При работе фонарика батарейка постепенно разряжается, и напряжение в электрической цепи фонарика падает. На рисунке 27 показана зависимость напряжения в цепи от времени работы фонарика. По горизонтальной оси откладывается время в часах, прошедшее с момента завершения подзарядки, по вертикальной оси — напряжение в вольтах. Определите по рисунку, через сколько часов работы фонарика после завершения подзарядки напряжение уменьшится до 1,4 вольт.

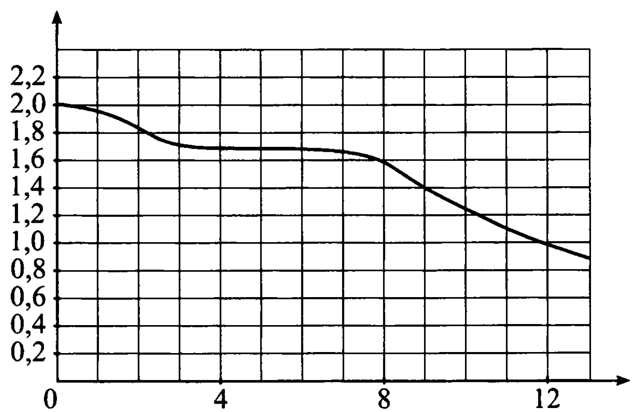


Рис. 27.

Вариант 2

1. Установите соответствие между графиками функций (см. рис. 28) и формулами, которые их задают.

1) $y = -\dfrac{1}{x}$ 2) $y = \sqrt{x+2}$ 3) $y = \dfrac{1}{x}$ 4) $y = x^2$

Ответ:

А	Б	В

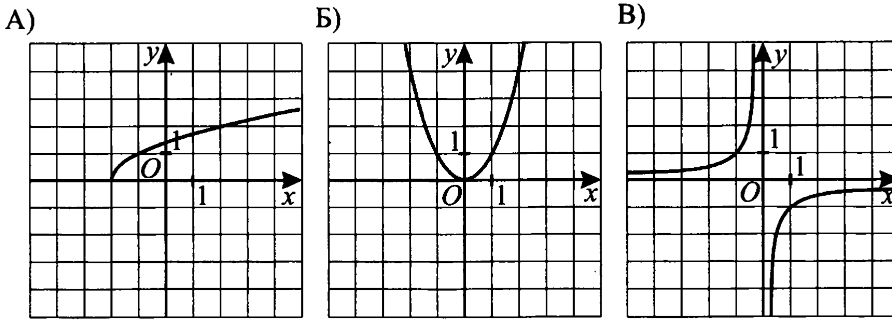


Рис. 28.

2. На рисунке 29 изображены графики функций $y = \frac{1}{2}x + 2$ и $y = -\frac{1}{4}x^2 + 4$. Вычислите координаты точки B.

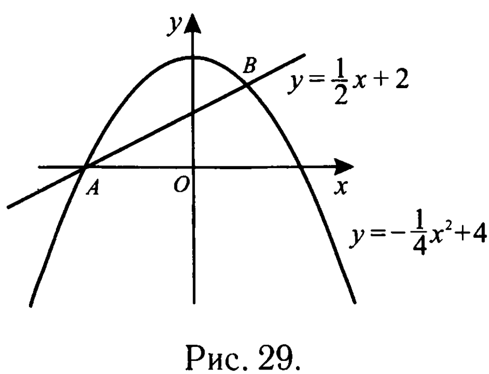


Рис. 29.

3. На рисунке 30 показано изменение температуры воздуха в некотором населённом пункте в течение двух суток. По горизонтали указывается время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия.

Определите по графику разность (в градусах Цельсия) между наибольшей и наименьшей температурами воздуха за эти двое суток.

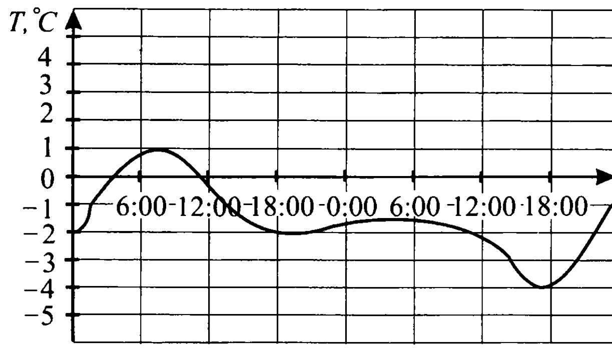


Рис. 30.

4. Какой формулой задаётся функция, график которой изображён на рисунке 31?

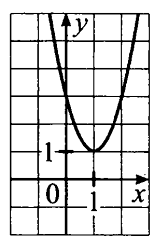


Рис. 31.

1) $y = -(x+1)^2 + 1$ 2) $y = (x-1)^2 + 1$

3) $y = 2(x-1)^2 + 1$ 4) $y = -2(x+1)^2 + 1$

5. На рисунке 32 изображены графики функций $y = \dfrac{1}{x}$ и $y = 4x$. Вычислите координаты точки B.

6. На графике изображена зависимость крутящего момента двигателя от числа оборотов в минуту (см. рис. 33). На оси абсцисс откладывается число оборотов в минуту, на оси ординат — крутящий момент в Н·м. Чему равен крутящий момент (в Н·м), если двигатель делает 3500 оборотов в минуту?

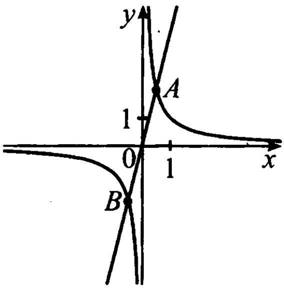


Рис. 32.

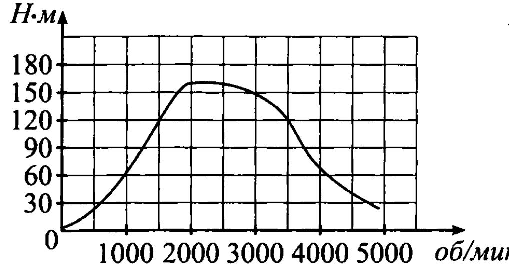


Рис. 33.

Вариант 3

1. Установите соответствие между графиками функций (см. рис. 34) и формулами, которые их задают.

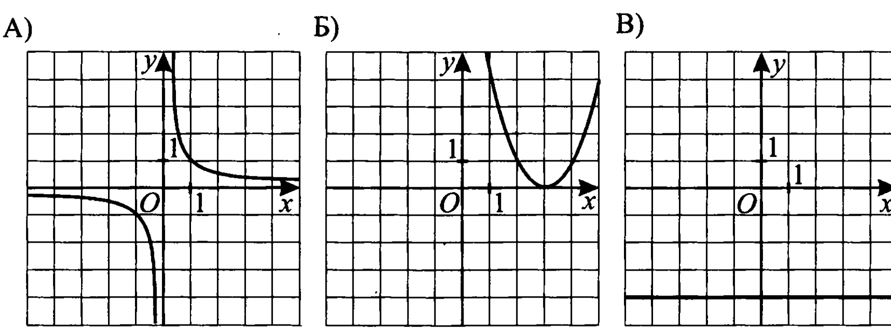


Рис. 34.

1) $y = (x-3)^2$ 2) $y = x^2 + 3$ 3) $y = \dfrac{1}{x}$ 4) $y = -4$

Ответ:

А	Б	В

2. На рисунке 35 изображены графики функций $y = x^2 - 5$ и $y = 2x - 2$. Вычислите координаты точки A.

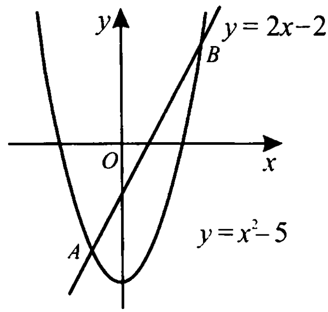


Рис. 35.

3. На рисунке 36 показано изменение температуры воздуха на протяжении суток. По горизонтали указывается время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия.

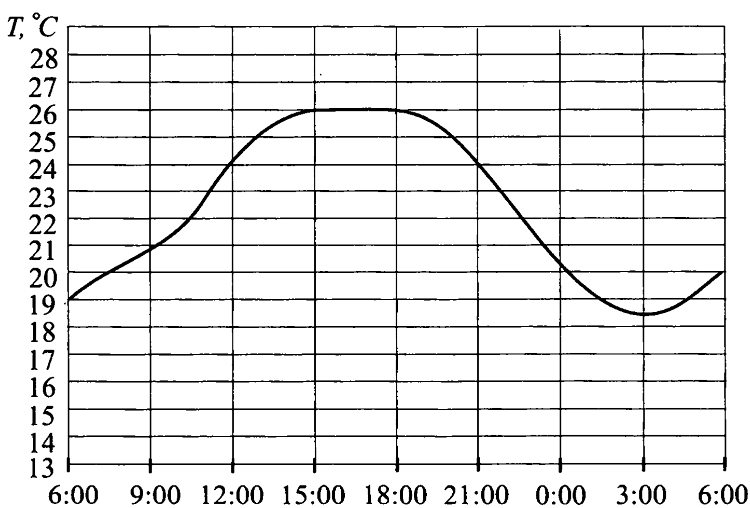


Рис. 36.

Определите по графику, сколько часов прошло между моментами, когда температура впервые за эти сутки приняла наибольшее и наименьшее значения.

4. Какой из графиков является графиком функции $y = \dfrac{2}{x-1} + 3$ (см. рис. 37)?

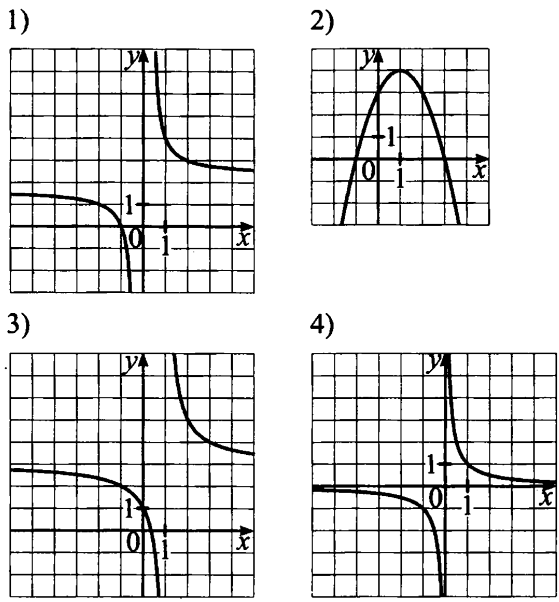


Рис. 37.

5. На рисунке 38 изображены графики функций $y = \dfrac{3}{x}$ и $y = \dfrac{2}{x-1}$. Найдите координаты точки A.

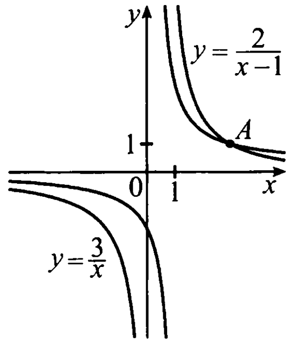


Рис. 38.

6. На графике показан процесс разогрева двигателя легкового автомобиля (см. рис. 39). На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее с момента запуска двигателя, на оси ординат — температура двигателя в градусах Цельсия. Определите по графику, за сколько минут двигатель нагреется с $40°C$ до $70°C$.

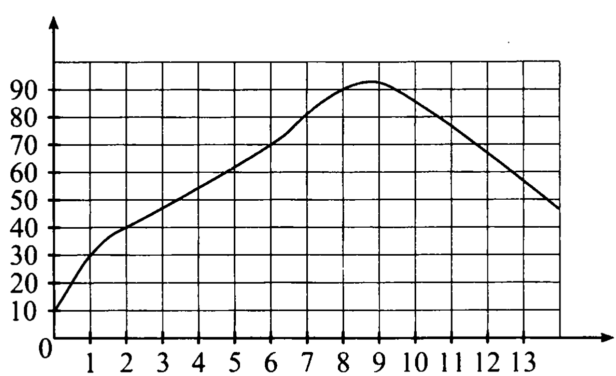


Рис. 39.

Вариант 4

1. Установите соответствие между графиками функций (см. рис. 40) и формулами, которые их задают.

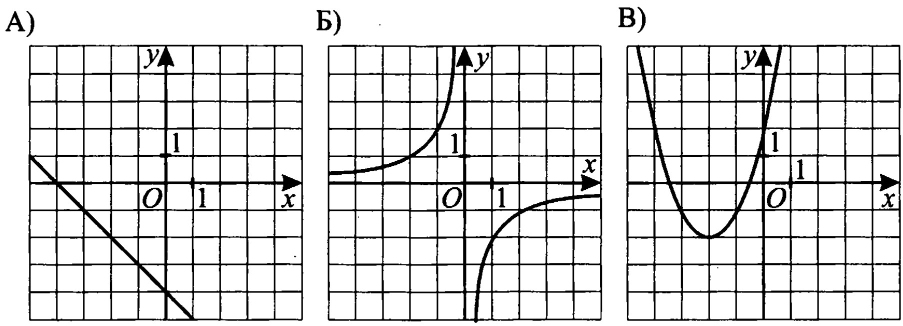


Рис. 40.

1) $y = -\frac{1}{x}$ 2) $y = -\frac{2}{x}$ 3) $y = (x+2)^2 - 2$ 4) $y = -x - 4$

Ответ:

А	Б	В

2. На рисунке 41 изображены графики функций $y = \frac{1}{4}x^2 - 4$ и $y = -\frac{1}{2}x + 2$. Вычислите координаты точки B.

3. На рисунке 42 показано изменение температуры воздуха на протяжении двух суток. По горизонтали указывается время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия.

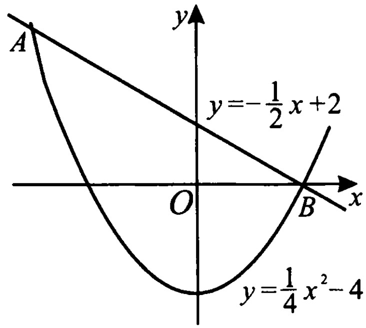


Рис. 41.

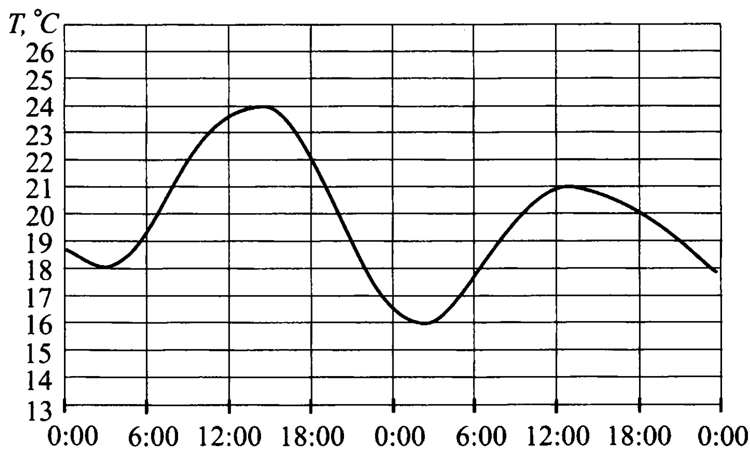


Рис. 42.

Определите по графику разницу (в градусах Цельсия) между наименьшими значениями температуры за эти двое суток.

4. Установите соответствие между графиками функций (см. рис. 43) и формулами, которые из задают.

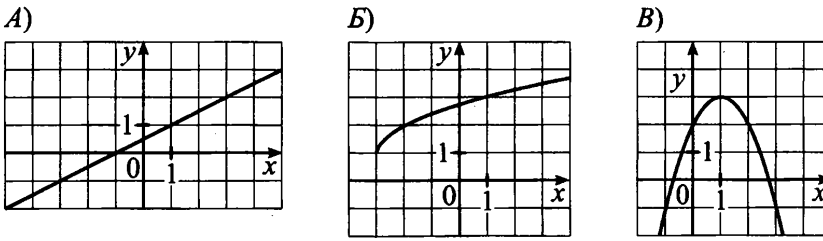


Рис. 43.

1) $y = \sqrt{x+3} + 1$ 2) $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$

3) $y = -x^2 + 2x + 2$ 4) $y = (x-1)^2 + 2$

Ответ:

А	Б	В

5. На рисунке 44 изображены графики функций $y = 2x + 1$, $y = 4 - x$, $y = \dfrac{3}{2}x$. Вычислите координаты точки C.

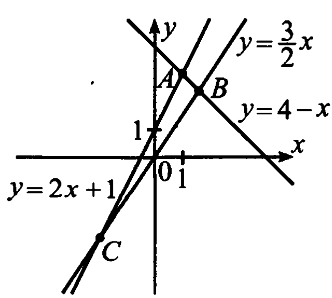


Рис. 44.

6. В аэропорту чемоданы пассажиров поднимают в зал выдачи багажа по транспортёрной ленте. При проектировании транспортёра необходимо учитывать допустимую силу натяжения ленты транспорта. На рисунке 45 изображена зависимость натяжения ленты от α — от угла наклона транспортёра к горизонту при расчётной нагрузке. На оси абсцисс откладывается угол подъёма в градусах, на оси ординат — сила натяжения транспортёрной ленты (в килограммах силы). При каком угле наклона сила натяжения достигает 180 кгс? Ответ дайте в градусах.

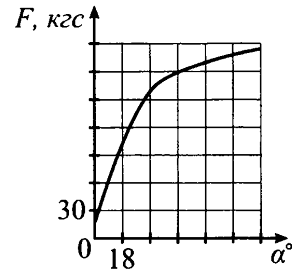


Рис. 45.

Вариант 5

1. Установите соответствие между графиками функций (см. рис. 46) и формулами, которые их задают.

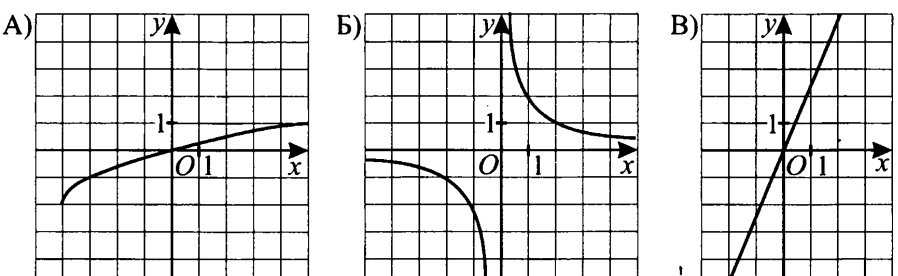


Рис. 46.

1) $y = \frac{5}{2}x$ 2) $y = \frac{2}{x}$

3) $y = \sqrt{x+4} - 2$ 4) $y = \sqrt{x+2} - 4$

Ответ:

А	Б	В

2. На рисунке 47 изображены графики функций $y = 3x + 3$ и $y = x^2 + 4x - 3$. Вычислите координаты точки B.

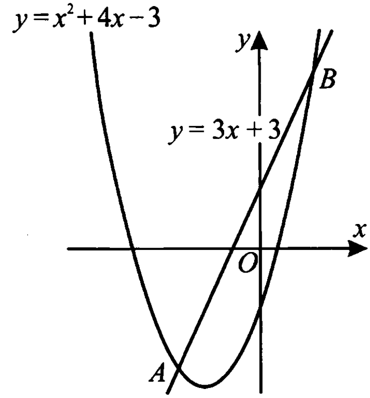


Рис. 47.

3. На рисунке 48 показан график зависимости длины тормозного пути некоторого автомобиля от скорости, с которой он может двигаться по тренировочному треку. По горизонтальной оси откладывается скорость (в км/ч), по вертикальной — длина тормозного пути (в метрах). Определите по графику, с какой наибольшей скоростью может двигаться в данных условиях автомобиль, чтобы его тормозной путь был не более 45 м. Ответ укажите в км/ч.

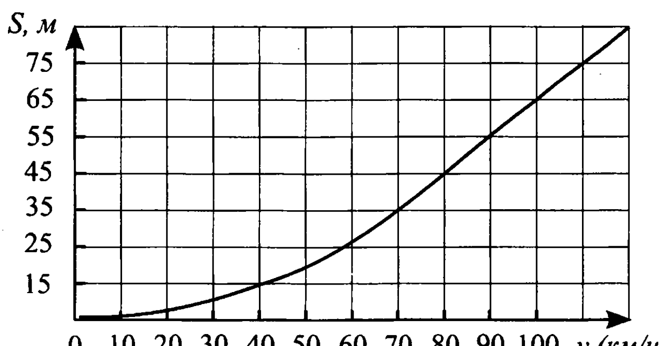


Рис. 48.

4. Какой формулой задаётся функция, график которой изображён на рисунке 49?

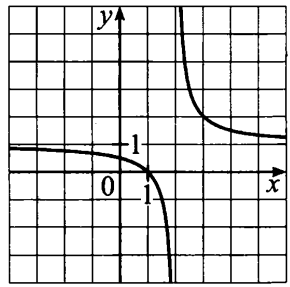


Рис. 49.

1) $y = \dfrac{2}{x-3} + 1$ 2) $y = \dfrac{1}{x-2} + 1$

3) $y = \dfrac{2}{x-1} + 1$ 4) $y = \dfrac{2}{x-2} + 2$

5. На рисунке 50 изображены графики функций $y = x^2+5x+1$ и $y = -x^2 - 3x - 5$. Вычислите координаты точки B.

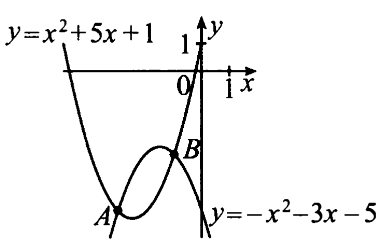


Рис. 50.

6. Мощность отопителя в автомобиле регулируется дополнительным сопротивлением, которое можно менять, поворачивая рукоятку в салоне машины. При этом меняется сила тока в электрической цепи электродвигателя — чем меньше сопротивление, тем больше сила тока и тем быстрее вращается мотор отопителя. На рисунке 51 показана зависимость силы тока от величины сопротивления. На оси абсцисс откладывается сопротивление (в омах), на оси ординат — сила тока в амперах. Сколько ампер составляет сила тока в цепи при сопротивлении 1,5 Ом?

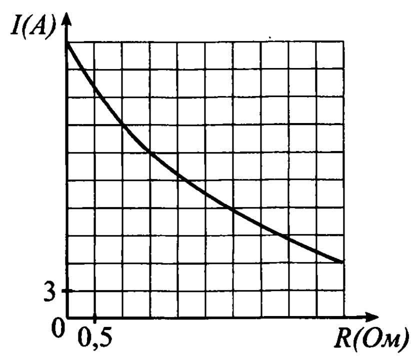


Рис. 51.

Вариант 6

1. Установите соответствие между графиками функций (см. рис. 52) и формулами, которые их задают.

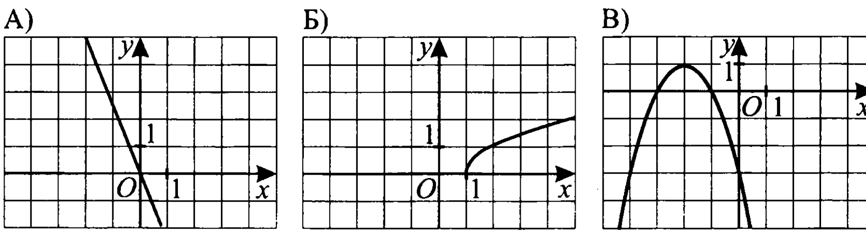


Рис. 52.

1) $y = \sqrt{x-1}$ 2) $y = -(x+2)^2 + 1$

3) $y = -\dfrac{5}{3}$ 4) $y = -\dfrac{5}{2}x$

Ответ:

А	Б	В

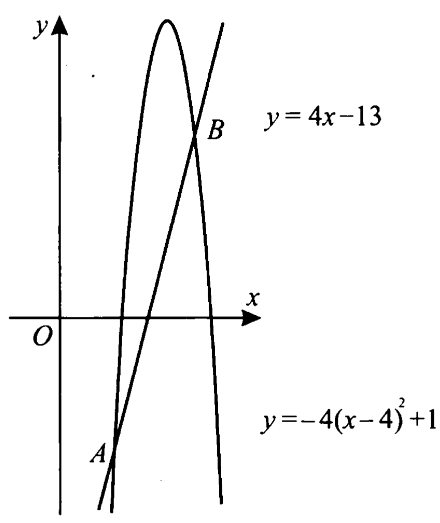


Рис. 53.

2. На рисунке 53 изображены графики функций $y = 4x - 13$ и $y = -4(x-4)^2 + 11$. Вычислите координаты точки A.

3. На рисунке 54 показан график изменения разряда аккумулятора мобильного телефона. На вертикальной оси отмечается напряжение (в вольтах), на горизонтальной оси — время работы телефона (в часах) после подзарядки.

Определите по графику, какое напряжение (в вольтах) будет давать аккумулятор через 20 часов после подзарядки.

Рис. 54.

4. Установите соответствие между графиками функций (см. рис. 55) и формулами, которые их задают.

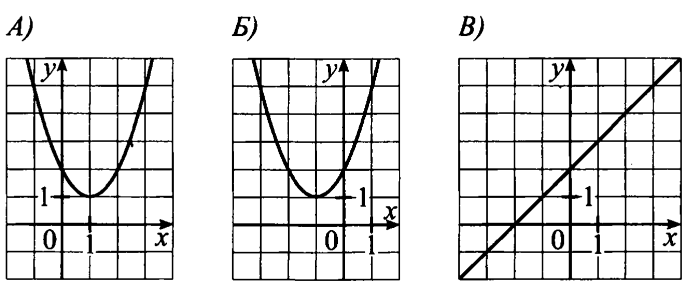


Рис. 55.

1) $y = (x-1)^2 + 1$ 2) $y = x + 1$

3) $y = (x+1)^2 + 1$ 4) $y = x + 2$

Ответ:

А	Б	В

5. На рисунке 56 изображены графики функций $y = x^2 - 3$ и $y = x + 3$. Вычислите координаты точки A.

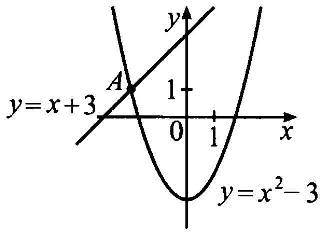


Рис. 56.

6. В ходе химической реакции количество исходного вещества (реагента), которое ещё не вступило в реакцию, со временем уменьшается. На рисунке эта зависимость представлена графиком. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее с момента начала реакции, на оси ординат — масса оставшегося реагента, который ещё не вступил в реакцию (в граммах). Определите по графику, сколько граммов реагента вступило в реакцию за первые четыре минуты.

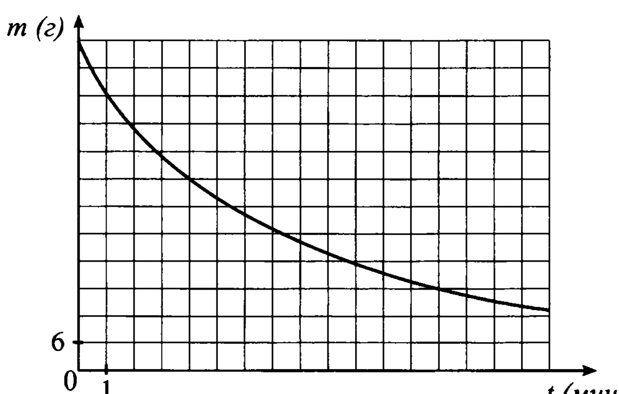


Рис. 57.

Глава 2. Планиметрия

Углы

ⓘ *Немного полезной информации*

Фигура, образованная двумя лучами с общей вершиной и одной из частей плоскости, ограниченной этими лучами, называется **углом**.

Общая вершина лучей называется **вершиной угла**, а сами лучи — **сторонами угла** (см. рис. 58).

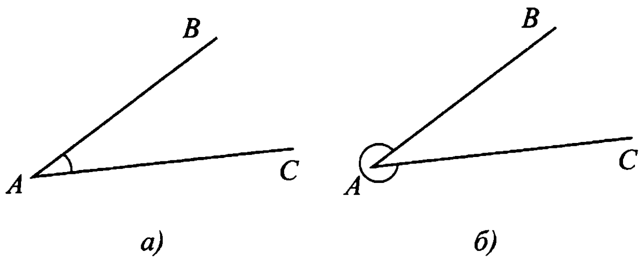


Рис. 58.

Изображённые на рисунке 58 углы обозначаются $\angle BAC$ (или $\angle CAB$, или просто $\angle A$). Но обычно в геометрии рассматриваются «меньшие» углы (см. рис. 58 а), мы будем тоже следовать этому обозначению.

Угол называется **развёрнутым**, если его стороны вместе образуют прямую (см. рис. 59). Величина развёрнутого угла равна 180°.

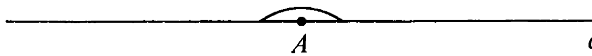


Рис. 59.

Два угла называются **смежными**, если одна сторона у них общая, а две другие составляют вместе прямую. Например, на рисунке 60 $\angle AOB$ и $\angle BOC$ — смежные. Сумма смежных углов равна 180° ($\angle COB + \angle BOA = 180^\circ$).

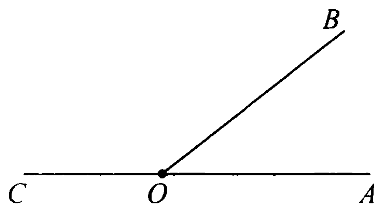


Рис. 60.

Угол, равный своему смежному, называется **прямым**. Например, $\angle ABD$ и $\angle DBC$ на рисунке 61 — прямые. Прямой угол равен 90°.

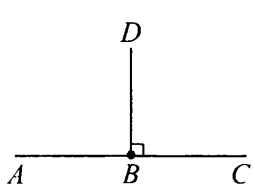


Рис. 61.

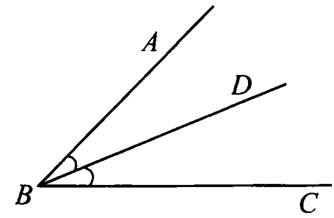


Рис. 62.

Биссектриса — это луч, исходящий из вершины угла и делящий его пополам. На рисунке 62 BD — биссектриса острого угла ABC $\left(\angle ABD = \angle DBC = \frac{1}{2}\angle ABC\right)$.

Прямые, пересекающиеся под прямым углом, называются **перпендикулярными** (если прямые a и b перпендикулярны, пишут $a \perp b$).

Если угол меньше 90°, он называется **острым**, если больше 90° — **тупым**.

Два угла называются **вертикальными**, если стороны одного угла являются продолжениями сторон другого. Вертикальные углы равны. Например, на рисунке 63 $\angle AOB = \angle COD$, $\angle AOC = \angle BOD$.

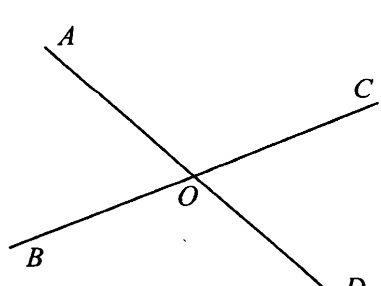


Рис. 63.

Задачи с решениями

7. Найдите градусную меру угла $\angle COB$, если $\angle AOC = 150°$ (см. рис. 64).

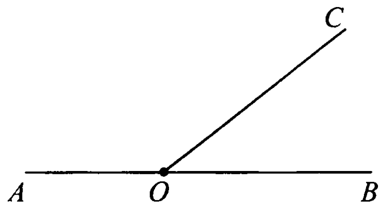


Рис. 64.

Решение.

$\angle AOC$ и $\angle COB$ — смежные, значит,
$\angle AOC + \angle COB = 180°$, $\angle COB = 180° - 150° = 30°$.

Ответ: 30°.

Немного полезной информации

Прямые, которые не пересекаются, называются **параллельными**.

Две прямые, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны. На рисунке 65 $a \perp c$ и $b \perp c$, а значит, $a \parallel b$.

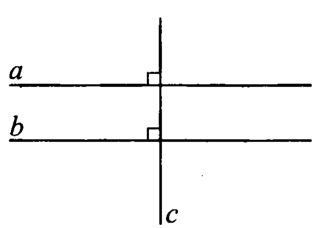


Рис. 65.

Две прямые, параллельные третьей, также параллельны. Например, если $a \parallel b$ и $b \parallel c$, то $a \parallel c$ (см. рис. 66).

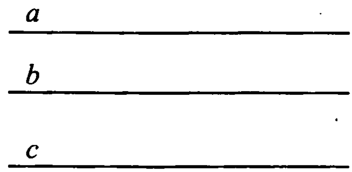


Рис. 66.

Рассмотрим две прямые, пересечённые третьей, которая называется секущей (см. рис. 67).

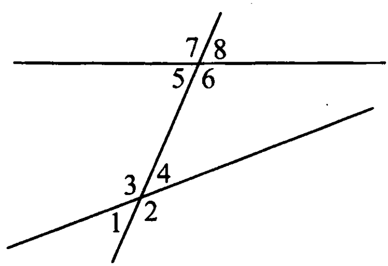


Рис. 67.

$\angle 4$ и $\angle 5$, $\angle 3$ и $\angle 6$ — накрест лежащие; $\angle 1$ и $\angle 5$, $\angle 4$ и $\angle 8$, $\angle 2$ и $\angle 6$, $\angle 3$ и $\angle 7$ — соответственные; $\angle 4$ и $\angle 6$, $\angle 3$ и $\angle 5$ — односторонние.

При пересечении параллельных прямых секущей (см. рис. 68) накрест лежащие углы равны ($\angle 4 = \angle 5$, $\angle 3 = \angle 6$), соответственные углы равны ($\angle 2 = \angle 6$, $\angle 3 = \angle 7$, $\angle 1 = \angle 5$, $\angle 4 = \angle 8$), а сумма односторонних углов равна $180°$
($\angle 4 + \angle 6 = 180°$, $\angle 3 + \angle 5 = 180°$).

Верно и обратное.

- Если при пересечении двух прямых третьей образуются равные накрест лежащие углы, то прямые параллельны.
- Если при пересечении двух прямых третьей образуются равные соответственные углы, то прямые параллельны.

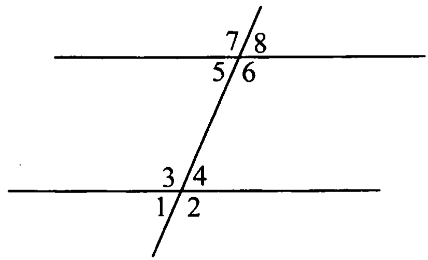


Рис. 68.

- Если при пересечении двух прямых третьей сумма односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны.

Задачи с решениями

8. Докажите, что прямые a и b параллельны (см. рис. 69).

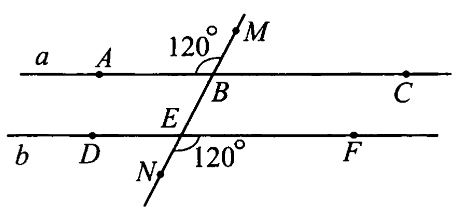


Рис. 69.

Решение.

$\angle DEB = \angle FEN = 120°$ (так как эти углы вертикальные).

Так как соответственные углы DEB и ABM равны, то прямые a и b параллельны.

Немного полезной информации

Серединным перпендикуляром к отрезку называется прямая, перпендикулярная отрезку и проходящая через его середину. Все точки, лежащие на серединном перпендикуляре к отрезку, равноудалены от его концов (то есть на рисунке 70 прямая a — серединный перпендикуляр к отрезку AB, а значит, $CA = CB$).

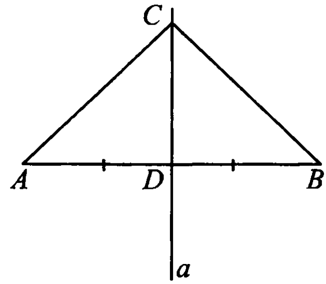


Рис. 70.

Теорема Фалеса. Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.

Рассмотрим пример (см. рис. 71). Если
$OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$ и $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$, то
$OB_1 = B_1B_2 = B_2B_3$.

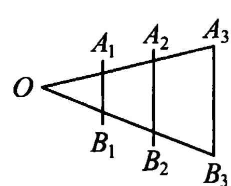


Рис. 71.

Треугольник

Треугольником называется многоугольник с тремя углами. Например, на рисунке 72 изображён $\triangle ABC$ (так обозначается треугольник с заданными вершинами).

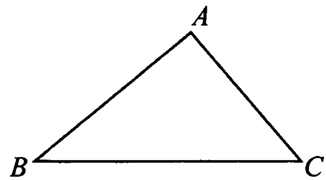


Рис. 72.

Периметром треугольника называется сумма длин его сторон. Например, периметр $\triangle ABC$ (см. рис. 72) равен $AB + BC + CA$.

Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны. Например, AM — медиана $\triangle ABC$ (см. рис. 73).

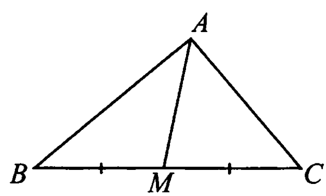


Рис. 73.

Биссектриса треугольника — отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину с точкой противоположной стороны. Проще говоря, отрезок AK (см. рис. 74) — биссектриса треугольника ABC, если $\angle BAK = \angle CAK$.

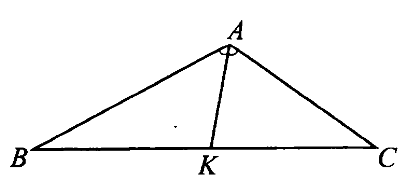


Рис. 74.

Высотой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны (или её продолжения) и перпендикулярный этой стороне. Например, AH — высота $\triangle ABC$ (см. рис. 75).

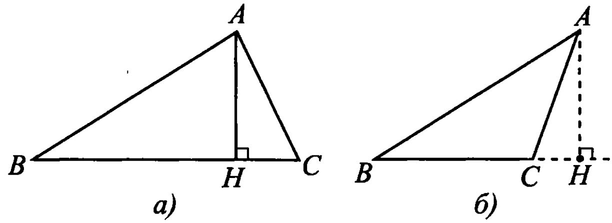


Рис. 75.

Задачи с решениями

9. Укажите номера верных утверждений:

1) Сумма смежных углов равна 90°.

2) При пересечении параллельных прямых секущей накрест лежащие углы равны.

3) Вертикальные углы равны.

4) Если A_1, A_2 лежат на одной стороне угла $\angle B_2OA_2$, а B_1, B_2 — на другой, $A_1B_1 \parallel A_2B_2$ и $OA_1 = A_1A_2$, то $B_1B_2 = 2OB_1$ (см. рис. 71).

5) Развёрнутым называется угол, меньший 90°.

Решение.

Утверждение 1) неверно, так как сумма смежных углов равна 180°.

Утверждение 2) верно, так как является свойством параллельных прямых.

Утверждение 3) верно по свойству вертикальных углов.

Утверждение 4 неверно, так как $B_1B_2 = OB_1$ по теореме Фалеса (см. рис. 71).

Утверждение 5) неверно, так как развёрнутый угол равен 180°.

Ответ: 23.

ⓘ *Немного полезной информации*

Сумма углов треугольника равна 180°.

Сумма двух сторон треугольника больше третьей.

Против бóльшей стороны треугольника лежит бóльший угол.

Против бóльшего угла треугольника лежит его бóльшая сторона.

Равенство треугольников

Равные треугольники — это такие треугольники, которые можно совместить друг с другом, наложив друг на друга так, чтобы они совпали.

Признаки равенства треугольников.

1. Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

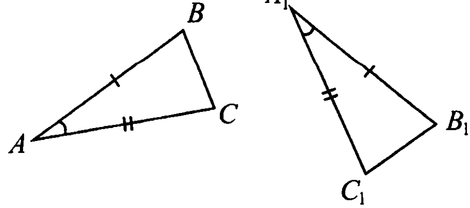


Рис. 76.

Например, если $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$ (см. рис. 76), то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

2. Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

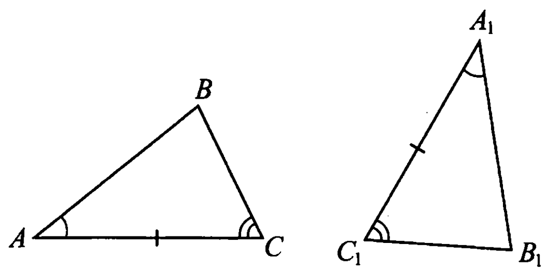


Рис. 77.

Например, если $AC = A_1C_1$, $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$ и $\angle BCA = \angle B_1C_1A_1$, то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (см. рис. 77).

3. Если три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

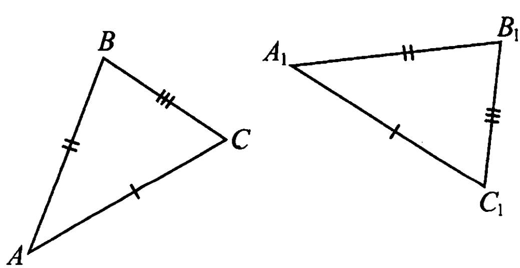


Рис. 78.

Например, если $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$, то $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (см. рис. 78).

Подобие фигур

Часто встречаются фигуры, которые имеют разные размеры, но одинаковую форму, например, все круги или все квадраты. Такие фигуры называют подобными.

Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ **подобны друг другу** ($\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$), если $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ и $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = k$, где k называют **коэффициентом подобия** (см. рис. 79).

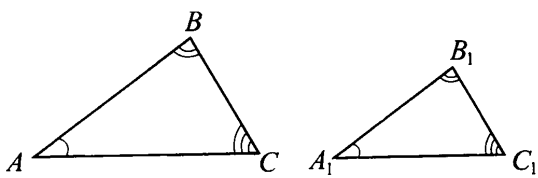


Рис. 79.

В подобных треугольниках медианы, биссектрисы и высоты пропорциональны с тем же коэффициентом.

Признаки подобия треугольников

1. Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны.

Например, если $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ (см. рис. 80).

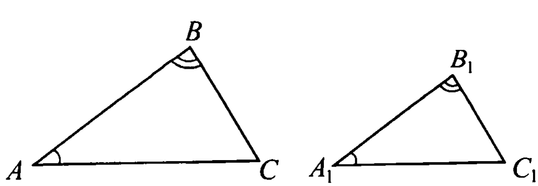


Рис. 80.

2. Если две стороны одного треугольника соответственно пропорциональны двум сторонам другого треугольника, а углы, заключённые между этими двумя сторонами, равны, то такие треугольники подобны.

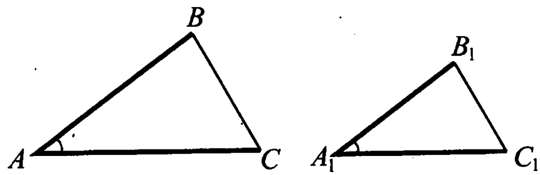


Рис. 81.

Например, если $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC}$ и $\angle A = \angle A_1$, то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ (см. рис. 81).

3. Если три стороны одного треугольника соответственно пропорциональны трём сторонам другого, то такие треугольники подобны.

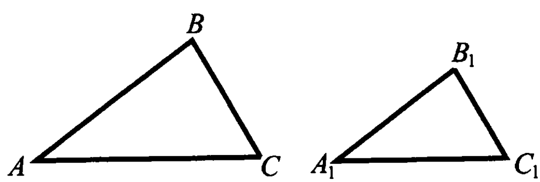


Рис. 82.

Например, если $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC}$, то $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ (см. рис. 82).

Задачи с решениями

10. Найдите градусную меру угла $\angle C$ треугольника ABC (см. рис. 83), если $\angle A = 120°$, $\angle B = 30°$.

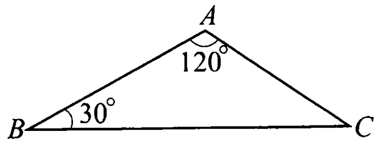


Рис. 83.

Решение.

$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, откуда $120° + 30° + \angle C = 180°$, $\angle C = 30°$.

Ответ: 30°.

11. Найдите сторону A_1C_1 треугольника $A_1B_1C_1$, если $\angle B_1A_1C_1 = \angle BAC$, $\angle B_1C_1A_1 = \angle BCA$, $AC = 10$, $B_1C_1 = 4$, $BC = 8$ (см. рис. 84).

Решение.

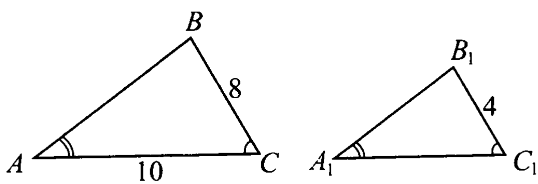


Рис. 84.

$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ по двум углам (первый признак подобия треугольников). $\dfrac{B_1C_1}{BC} = \dfrac{A_1C_1}{AC}$; $\dfrac{4}{8} = \dfrac{A_1C_1}{10}$;

$A_1C_1 = 10 \cdot \dfrac{4}{8} = 5$.

Ответ: 5.

Замечание. Часто углы измеряют не в градусах, а в радианах. $1° = \dfrac{\pi}{180°}$ (радиан), впрочем, единицу измерения часто опускают. $30^\circ = 30\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$; $60^\circ = \frac{\pi}{3}$, $90^\circ = \frac{\pi}{2}$, $180^\circ = \pi$ и т. д.

ⓘ *Немного полезной информации*

Прямоугольный треугольник

Треугольник называется **прямоугольным**, если один из его углов равен 90° $\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Сторона, лежащая против угла 90° (прямого угла), называется **гипотенузой**, две других — **катетами**.

Теорема Пифагора.

Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Например, $AB^2 = AC^2 + BC^2$ (см. рис. 85).

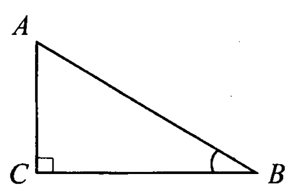


Рис. 85.

Синусом острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение противолежащего катета к гипотенузе.

Косинусом острого угла в прямоугольном треугольнике называется отношение прилежащего катета к гипотенузе.

Например, $\sin\angle B = \frac{AC}{AB}$, $\cos\angle B = \frac{CB}{AB}$ (см. рис. 85).

Внешние углы треугольника

Угол, смежный с каким-нибудь углом треугольника, называется **внешним углом** треугольника. Например, $\angle CBK$ (см. рис. 86) — внешний угол $\triangle ABC$.

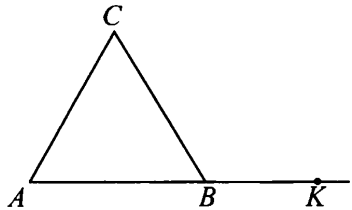


Рис. 86.

Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов треугольника, не смежных с ним ($\angle CBK = \angle BCA + \angle BAC$, см. рис. 86).

Синус угла равен синусу смежного с ним угла ($\sin \angle CBK = \sin \angle CBA$).

Косинусы смежных углов — противоположные числа ($\cos \angle CBK = -\cos \angle CBA$).

Значения синуса и косинуса некоторых углов

α	градусы	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$
	радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin\alpha$		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos\alpha$		1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

В прямоугольном треугольнике катет, лежащий против угла $30°$ $\left(\frac{\pi}{6}\right)$, равен половине гипотенузы. На рисунке 87 в $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$, $\angle A = 30°$, значит, $BC = \frac{1}{2}AB$.

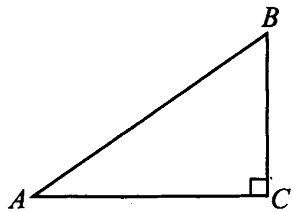


Рис. 87.

Задачи с решениями

12. Найдите $\cos 120°$.

Решение.

Так как угол в $120°$ смежен с углом в $60°$ $(120° + 60° = 180°)$, то $\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2} = -0{,}5$.

Ответ: $-0{,}5$.

13. Найдите сторону AC треугольника ABC, если $\angle ACB = 90°$, $AB = 5$, $BC = 4$ (см. рис. 88).

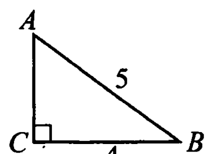


Рис. 88.

Решение.

По теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2$, откуда $AC^2 = AB^2 - BC^2 = 5^2 - 4^2 = 9$, $AC = \sqrt{9} = 3$.

Ответ: 3.

Немного полезной информации

Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется **средней линией** треугольника. Она параллельна стороне треугольника и равна её половине. $MN \parallel AC$, $MN = \frac{1}{2}AC$ (см. рис. 89).

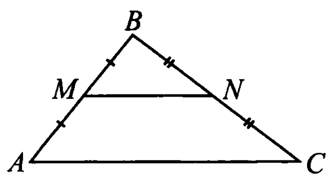


Рис. 89.

В любой треугольник можно вписать окружность, которая будет касаться каждой из его сторон, т. е. иметь с ней одну общую точку. Такая окружность — единственная. Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, вписанной в треугольник (см. рис. 90).

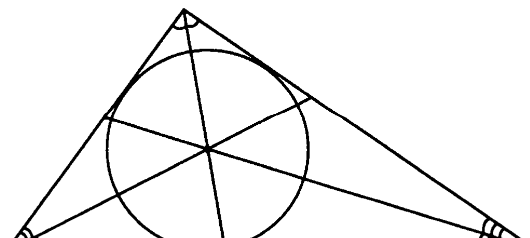
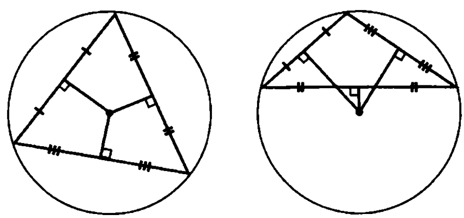


Рис. 90.

Вокруг любого треугольника можно описать окружность, которая проходит через все его вершины. Такая окружность — единственная. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке, которая является центром окружности, описанной около треугольника (см. рис. 91).



а) б)

Рис. 91.

Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке.

Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2 : 1, считая от вершины. На рисунке 92 получаем $\dfrac{CO}{C_1O} = \dfrac{BO}{B_1O} = \dfrac{AO}{A_1O} = \dfrac{2}{1}$.

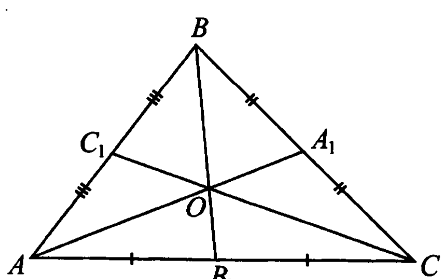


Рис. 92.

Равнобедренный и равносторонний треугольники

Треугольник называется **равнобедренным**, если две его стороны равны. Они называются боковыми сторонами. Третья сторона называется основанием. На рисунке 93 $AB = BC$, AC — основание $\triangle ABC$.

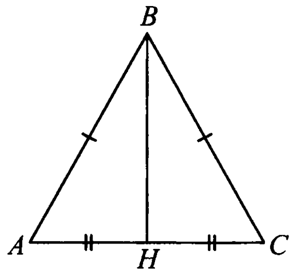


Рис. 93.

В равнобедренном треугольнике углы, прилежащие к основанию, равны ($\angle BCA = \angle BAC$ на рисунке 93), а высота, медиана и биссектриса, проведённые к основанию, совпадают. BH является сразу и медианой, и биссектрисой, и высотой в $\triangle ABC$ на рисунке 93.

Если в треугольнике два угла равны, то этот треугольник — равнобедренный. На рисунке 94 $\angle ABC = \angle ACB$, а значит, $\triangle ABC$ — равнобедренный ($AB = AC$).

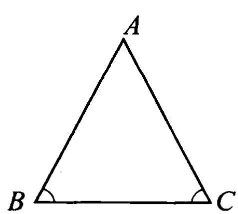


Рис. 94.

Треугольник называется **равносторонним**, если все его стороны равны. Равносторонние треугольники также называют правильными.

В равностороннем треугольнике все углы равны 60°, а медиана, биссектриса и высота, проведённые к любой из его сторон, совпадают.

Если в треугольнике все углы равны, то треугольник равносторонний.

Задачи с решениями

14. Найдите сторону AC треугольника ABC, если $\angle BAC = 120°$, $\angle ABC = 30°$, а $AB = 5$.

Решение.

$\angle ACB = 180° - \angle BAC - \angle ABC = 180° - 120° - 30° = 30° = \angle ABC$, значит, $\triangle ABC$ — равнобедренный и $AC = AB = 5$ (см. рис. 95).

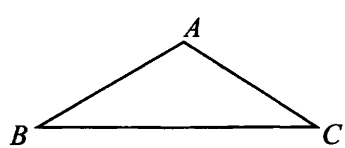


Рис. 95.

Ответ: 5.

15. Медианы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке O. Найдите AO, если $AA_1 = 6$.

Решение.

O — точка пересечения медиан (см. рис. 96).

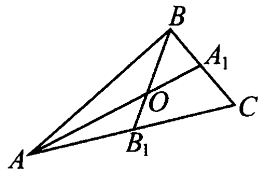


Рис. 96.

$\frac{AO}{OA_1} = \frac{2}{1} = 2$, $AO = 2OA_1$, $AO + A_1O = AA_1 = 6$, $2OA_1 + OA_1 = 6$, $3OA_1 = 6$, $OA_1 = 2$, $AO = 2OA_1 = 4$.

Ответ: 4.

ⓘ *Немного полезной информации*

Площадь треугольника

Площадь треугольника равна половине произведения его стороны на высоту, проведённую к этой стороне. $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BH$ (см. рис. 97).

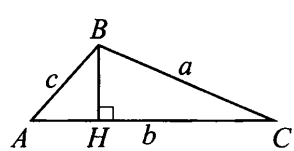


Рис. 97.

Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов. $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC$ (см. рис. 98).

Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними. $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BA \cdot AC \cdot \sin\angle A$ (см. рис. 97).

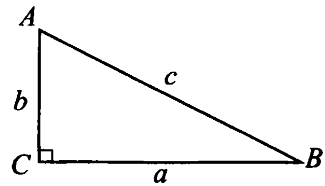


Рис. 98.

Площадь треугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной окружности $\left(S = p \cdot r,\right.$ $\left.p = \dfrac{a+b+c}{2}\right)$.

Площадь треугольника равна произведению трёх его сторон, делённому на учетверённый радиус описанной окружности $\left(S = \dfrac{abc}{4R}\right)$.

Задачи с решениями

16. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник на рисунке 99.

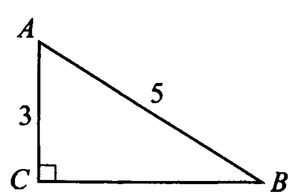


Рис. 99.

Решение.

По теореме Пифагора $CB^2 + AC^2 = AB^2$, $CB =$ $= \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$, $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AC \cdot CB = \dfrac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$, периметр $P = AC + CB + AB = 3 + 4 + 5 = 12$, $p = \dfrac{P}{2} = 6$, $S_{ABC} = pr = 6r$, но $S_{ABC} = 6$, значит, $6r = 6$, $r = 1$.

Ответ: 1.

17. Проектор полностью освещает экран A высотой 60 см, расположенный на расстоянии 300 см от проектора. На каком наименьшем расстоянии (в сантиметрах) от проектора нужно расположить экран B высотой 150 см, чтобы он был полностью освещён, если настройки проектора остаются неизменными (см. рис. 100)?

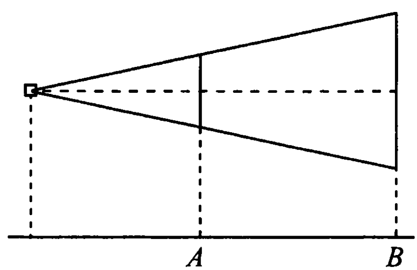


Рис. 100.

Решение.

Из рисунка 101 $\triangle OAA_1 \sim \triangle OBB_1$, значит,

$$\frac{BB_1}{AA_1} = \frac{OH_1}{OH}; \ \frac{150}{60} = \frac{OH_1}{300};$$

$$OH_1 = 300 \cdot \frac{150}{60} = 5 \cdot 150 = 750 \text{ (см)}.$$

Здесь используется свойство, что высоты подобных треугольников (OH и OH_1) относятся так же, как и стороны $\left(\dfrac{OH_1}{OH} = \dfrac{BB_1}{AA_1}\right)$.

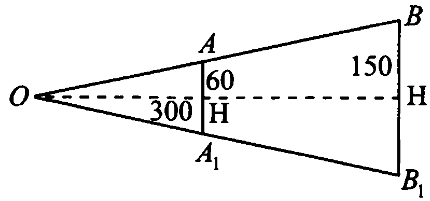


Рис. 101.

Ответ: 750.

18. Человек ростом 1,8 м стоит на расстоянии 20 шагов от фонарного столба и отбрасывает тень длиной в 20 шагов. Определите высоту столба в метрах.

Решение.

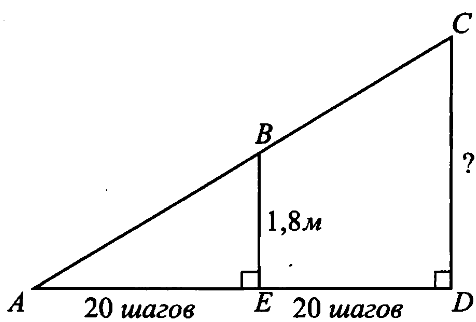


Рис. 102.

Рассмотрим рисунок 102. $\triangle ACD \sim \triangle ABE$, $\dfrac{CD}{BE} = \dfrac{AD}{AE}$; $AD = AE + ED = 20 + 20 = 40$; $\dfrac{CD}{1{,}8} = \dfrac{40}{20}$; $\dfrac{CD}{1{,}8} = 2$; $CD = 3{,}6$ (м).

Ответ: 3,6.

ⓘ *Немного полезной информации*

Параллелограмм

Параллелограмм — это четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны. На рисунке 103 $ABCD$ — параллелограмм, так как $AB \parallel CD$ и $BC \parallel AD$.

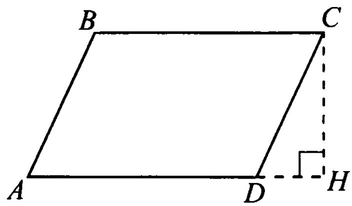


Рис. 103.

Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту ($S_{ABCD} = AD \cdot CH$, см. рис. 103).

Площадь параллелограмма равна произведению двух его сторон на синус угла между ними:
$S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin \angle BAD$ (см. рис. 103).

Свойства:

1) Сумма углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, равна 180°. То есть $\angle A + \angle B = 180°$ и $\angle B + \angle C = 180°$ (см. рис. 103).

2) В параллелограмме противоположные стороны равны, т. е. $AB = CD$, $AD = BC$ (см. рис. 103).

3) В параллелограмме противоположные углы равны, то есть $\angle A = \angle C$, $\angle B = \angle D$ (см. рис. 103).

4) Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, т. е. $AM = MC$, $BM = MD$ (см. рис. 104).

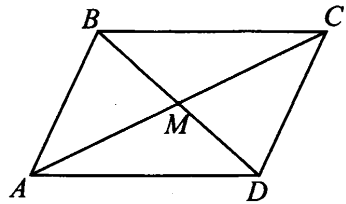


Рис. 104.

Признаки параллелограмма:

1) Если в четырёхугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырёхугольник — параллелограмм. То есть, если $AB \parallel CD$ и $AB = CD$, то $ABCD$ — параллелограмм (см. рис. 105).

2) Если в четырёхугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм. То есть, если $AB = CD$ и $BC = AD$, то $ABCD$ — параллелограмм (см. рис. 105).

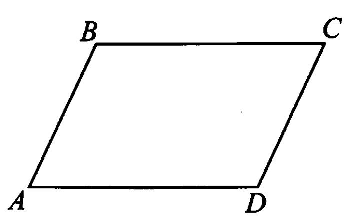


Рис. 105.

🗝 *Задачи с решениями*

19. В четырёхугольнике $ABCD$ $AB = CD = 5$, $\angle DBA = \angle CDB = 30°$. Найдите AO, если $AC = 8$ (см. рис. 106).

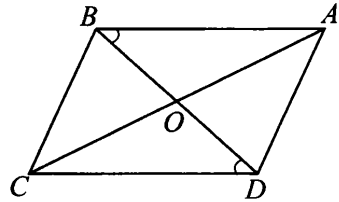


Рис. 106.

Решение.

Так как $\angle DBA = \angle CDB$, то $CD \parallel AB$ по признаку параллельных прямых, тогда $ABCD$ — параллелограмм. ($AB = CD$, $AB \parallel CD$ — первый признак параллелограмма), значит, по свойству 4 параллелограмма получаем $AO = \frac{1}{2}AC = 4$.

Ответ: 4.

ⓘ *Немного полезной информации*

Трапеция

Трапецией называется четырёхугольник, у которого две стороны параллельны (основания трапеции), а две другие не параллельны. Пример трапеции — на рисунке 107, где BC и AD — основания, а AB и CD — боковые стороны.

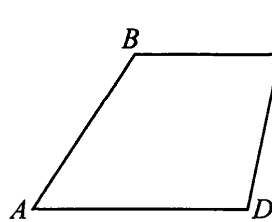


Рис. 107.

Средней линией трапеции называется отрезок, соединяющий середины её боковых сторон (MK в трапеции $ABCD$ на рисунке 108). Средняя линия параллельна основаниям и равна их полусумме $\left(MK = \frac{1}{2}(BC + AD)\right)$.

Площадь трапеции равна полусумме оснований, умноженной на высоту $\left(S_{ABCD} = \frac{BC + AD}{2} \cdot BH\text{, см. рис. 108}\right)$.

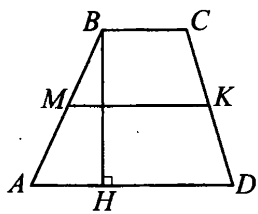


Рис. 108.

Трапеция называется **равнобедренной**, если её боковые стороны равны ($AB = CD$ в трапеции $ABCD$ на рисунке 109).

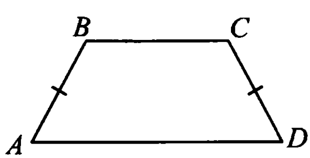


Рис. 109.

В равнобедренной трапеции углы при каждом из оснований равны ($\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$ на рисунке 109). Верно и обратное утверждение: если в трапеции углы при основании равны, то трапеция равнобедренная.

Задачи с решениями

20. Найдите площадь трапеции на рисунке 110.

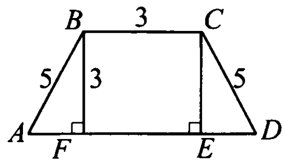


Рис. 110.

Решение.

Заметим, что $BFEC$ — параллелограмм (так как стороны попарно параллельны), откуда $FE = BC$.

Из $\triangle ABF$ по теореме Пифагора
$AF = \sqrt{AB^2 - BF^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$. Аналогично $ED = 4$.
$AD = AF + FE + ED = 4 + 3 + 4 = 11$.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(BC + AD) \cdot BF = \frac{33}{2} = 16{,}5.$$

Ответ: 16,5.

Прямоугольник, ромб, квадрат

Прямоугольник — это параллелограмм, у которого все углы прямые (см. рис. 111).

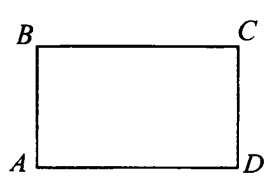


Рис. 111.

Признак прямоугольника: если в параллелограмме диагонали равны, тот этот параллелограмм — прямоугольник.

Рассмотрим пример (см. рис. 112). Если мы знаем, что $ABCD$ — параллелограмм и $AC = BD$, то мы можем утверждать, что $ABCD$ — прямоугольник.

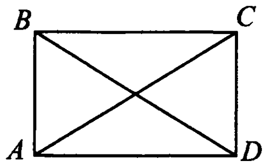


Рис. 112.

Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон ($S_{ABCD} = AB \cdot AD$ на рисунке 112). Диагонали любого прямоугольника равны.

Другим видом параллелограмма является **ромб** — такой четырёхугольник, все стороны которого равны между собой (см. рис. 113). Ромб является параллелограммом, диагонали которого взаимно перпендикулярны ($AC \perp BD$ на рисунке 114).

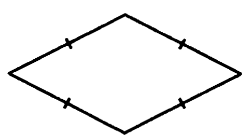


Рис. 113.

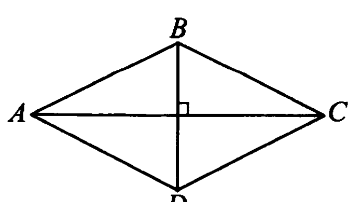


Рис. 114.

Признак ромба: если в параллелограмме диагонали перпендикулярны, то этот параллелограмм является ромбом. Если $ABCD$ — параллелограмм и $AC \perp BD$, то $ABCD$ — ромб (см. рис. 114).

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей. $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD$ для ромба $ABCD$ на рисунке 114.

Квадрат — это такой прямоугольник, у которого все стороны равны (см. рис. 115).

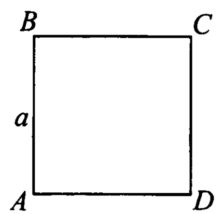


Рис. 115.

Квадрат является частным случаем ромба, а потому сочетает в себе свойства прямоугольника и ромба.

Площадь квадрата равна квадрату его стороны, то есть $S_{ABCD} = AB^2 = a^2$ (см. рис. 115).

Задачи с решениями

21. Найдите площадь ромба $ABCD$, изображённого на рисунке 116.

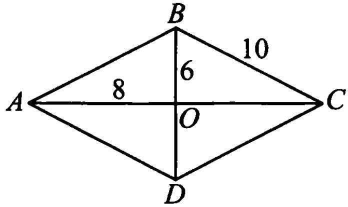


Рис. 116.

Решение.

$BD = 2BO = 2 \cdot 6 = 12$, $AC = 2AO = 2 \cdot 8 = 16$, так как ромб — параллелограмм и диагонали точкой пересечения делятся пополам. $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 12 = 96$.

Ответ: 96.

22. Укажите номера верных утверждений:

1) В равностороннем треугольнике все углы равны 90°.

2) Любой прямоугольник является ромбом.

3) В равнобедренной трапеции углы при основании равны.

4) Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

5) Сумма двух смежных углов больше 180°.

Решение.

Утверждение 1) неверно, так как в равностороннем треугольнике все углы равны 60°.

Утверждение 2) неверно, так как легко привести пример прямоугольника, который не является ромбом (см. рис. 117).

Утверждение 3) верно, оно является свойством равнобедренной трапеции.

Утверждение 4) верно, оно является свойством параллелограмма.

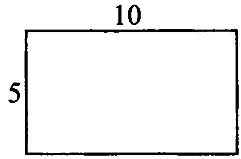


Рис. 117.

Утверждение 5) неверно, так как сумма смежных углов равна 180°.

Ответ: 34.

Немного полезной информации

Многоугольники

Конечно, бывают не только треугольники и четырёхугольники. Иногда встречаются и тринадцатиугольники, и даже 523-угольники. Это не так страшно, как может сперва показаться, так как все многоугольники (n-угольники) подчиняются некоторым общим законам: например, сумма углов выпуклого n-угольника равна $(n-2)\cdot 180^\circ = 180^\circ$. Так, для треугольника сумма углов $(3-2)\cdot 180^\circ = 180^\circ$, для четырёхугольника — $(4-2)\cdot 180^\circ = 360^\circ$, для 13-угольника — $(13-2)\cdot 180^\circ = 1980^\circ$.

Правильным многоугольником называется многоугольник, у которого все стороны равны и все углы равны. На рисунке 118 можно увидеть правильный пятиугольник.

В любой правильный многоугольник можно вписать окружность. То есть надо построить такую окружность, чтобы она касалась всех сторон правильного многоугольника (имела с каждой стороной ровно одну общую точку). В этом случае говорят, что многоугольник описан вокруг окружности. Пример для пятиугольника на рисунке 119.

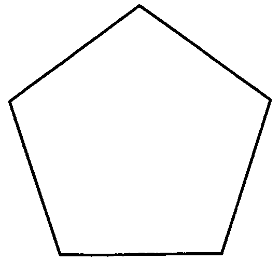


Рис. 118.

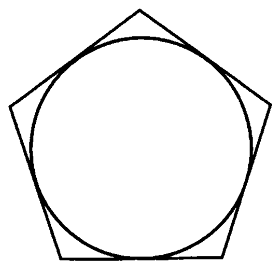


Рис. 119.

Вокруг любого правильного многоугольника можно описать окружность. То есть надо построить такую окружность, чтобы она проходила через все вершины правильного многоугольника (см. рис. 120). В этом случае говорят, что многоугольник вписан в окружность.

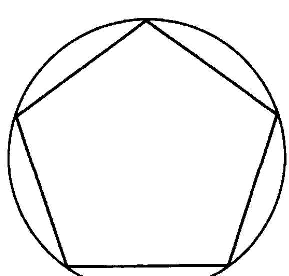


Рис. 120.

🗝 *Задачи с решениями*

23. Найдите сумму внутренних углов выпуклого шестиугольника (в градусах).

Решение.

Сумма углов шестиугольника равна $(6-2)\cdot 180^\circ = 720^\circ$.

Ответ: 720.

Окружность и круг

Окружностью называется геометрическая фигура, состоящая из всех точек плоскости, расположенных на заданном расстоянии от данной точки (центра окружности). Пример окружности изображён на рисунке 121.

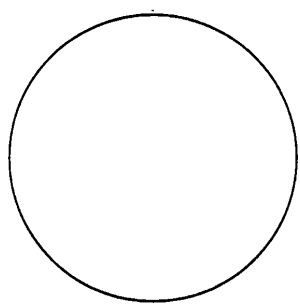


Рис. 121.

Отрезок, соединяющий центр окружности с какой-либо точкой окружности, называется **радиусом**.

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется **хордой**. Хорда, проходящая через центр окружности, называется **диаметром**. Диаметр — это наибольшая хорда окружности. Диаметр в 2 раза больше радиуса.

На рисунке 122 точка O — центр окружности, AO и BO — радиусы, AB и CD — хорды, при этом AB — диаметр.

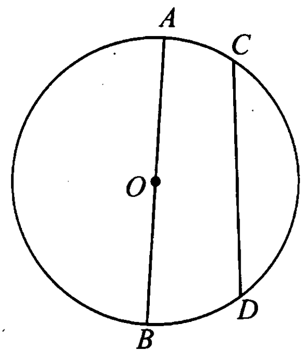


Рис. 122.

Любые две точки окружности делят её на две части. Каждая из этих частей называется **дугой** окружности. На рисунке 123 обозначены $\smile ANB$ и $\smile AMB$ — дуги, ограниченные точками A и B. Если из контекста понятно, о какой дуге идёт речь, то её обозначают только с помощью двух граничных точек, например, $\smile AB$ (см. рис. 123).

Часть плоскости, ограниченная окружностью, называется **кругом** (см. рис. 124).

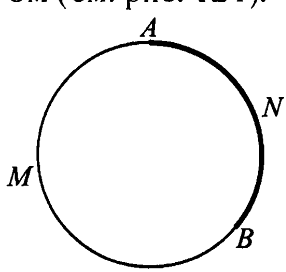


Рис. 123.

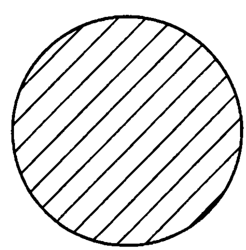


Рис. 124.

Взаимное расположение прямой и окружности

Окружность и прямая могут иметь две общие точки (см. рис. 125 а), одну общую точку (см. рис. 125 б) или не иметь общих точек (см. рис. 125 в).

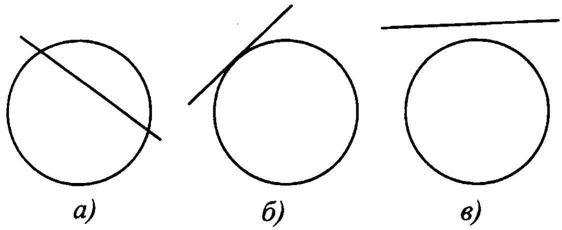


Рис. 125.

Если общих точек 2, то прямая называется **секущей** (см. рис. 125 а), если такая точка одна, то прямая называется **касательной** (см. рис. 125 б).

Взаимное расположение двух окружностей

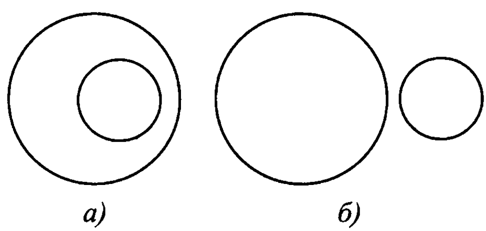


Рис. 126.

Две окружности могут не иметь общих точек (см. рис. 126), иметь одну общую точку (см. рис. 127) либо иметь две общие точки (см. рис. 128).

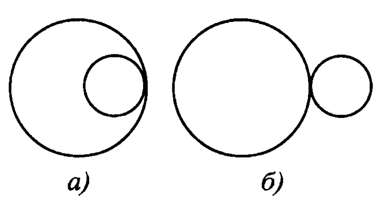


Рис. 127.

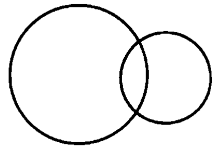


Рис. 128.

Длина окружности и площадь круга

Если радиус окружности равен R, то длина окружности (l) равна $2\pi R$, а площадь круга (S), ограниченного данной окружностью, — πR^2. Зная диаметр (d), можно найти длину окружности как $l = \pi d$, а площадь круга как $S = \dfrac{\pi d^2}{4}$

Углы, связанные с окружностью

Угол с вершиной в центре окружности называется **центральным** (см. рис. 129). Угловая величина дуги равна величине центрального угла, на неё опирающегося.

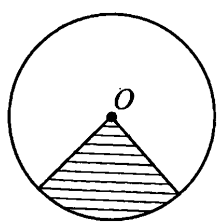


Рис. 129.

Угол, вершина которого принадлежит окружности, а стороны пересекают окружность, называется **вписанным** (см. рис. 130).

Вписанный угол равен половине угловой величины дуги, на которую он опирается. Вписанные углы, опирающиеся на одну дугу, равны.

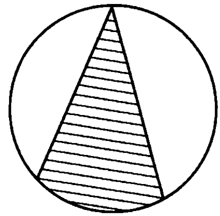


Рис. 130.

Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу.

Угол между пересекающимися хордами равен полусумме противоположных дуг, высекаемых хордами. На рисунке 131 $\angle\alpha = \frac{1}{2}(\smile AMB + \smile CND)$.

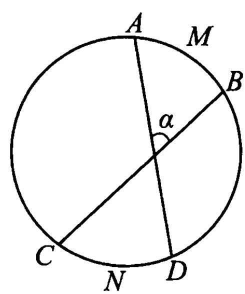


Рис. 131.

Угол между двумя секущими, пересекающимися вне круга, равен полуразности дуг, высекаемых секущими на окружности. На рисунке 132 $\angle\alpha = \frac{1}{2}(\smile AMB - \smile CND)$.

Угол между касательной и хордой, проведённой через точку касания, равен половине угловой величины дуги, заключённой между ними. $\angle\alpha = \frac{1}{2} \smile AMB$ на рисунке 133.

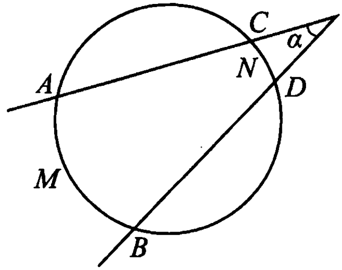


Рис. 132.

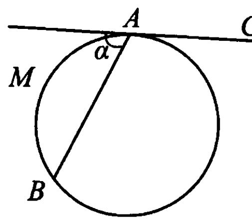


Рис. 133.

Длина дуги и площадь сектора

Рассмотрим дугу окружности радиуса R и центральный угол, на неё опирающийся. Если величина центрального угла (в градусах) равна α, то длина дуги равна $\frac{\pi R\alpha}{180}$. Например, если $\alpha = 60°$, $R = 5$, то длина дуги $\smile AB$ равна $\frac{5\pi \cdot 60}{180} = \frac{5\pi}{3}$ (см. рис. 134).

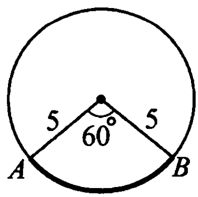


Рис. 134.

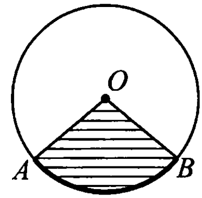


Рис. 135.

Круговым сектором (или просто сектором) называется часть круга, ограниченная дугой и двумя радиусами. Дуга, которая ограничивает сектор, называется **дугой сектора** (дуга $\smile AB$ на рисунке 135). Если её величина равна α (в градусах), то площадь сектора равна $\frac{\pi R^2}{360}\alpha$, где R — радиус окружности.

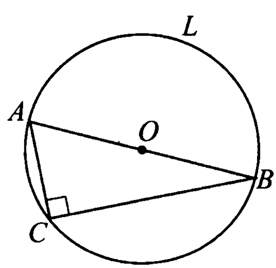


Рис. 136.

Если треугольник ABC вписан в окружность и $\angle C = 90°$, то AB — диаметр (см. рис. 136).

Если в треугольнике один из углов опирается на диаметр описанной окружности, то этот угол — прямой.

Задачи с решениями

24. На рисунке 137 окружность с центром O описана вокруг $\triangle ABC$. Найдите радиус окружности.

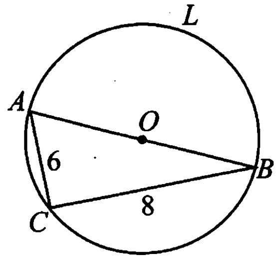


Рис. 137.

Решение.

$\angle ACB$ опирается на диаметр. Значит, $\angle ACB = 90°$, по теореме Пифагора $AB = \sqrt{AC^2 + CB^2} = 10$,

$AO = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5.$

Ответ: 5.

ⓘ *Немного полезной информации*

Четырёхугольник и окружность

Не во всякий четырёхугольник можно вписать окружность.

Не вокруг любого четырёхугольника можно описать окружность.

В любом описанном четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны. $AD + BC = AB + CD$ (см. рис. 138).

Если суммы противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равны, то в него можно вписать окружность.

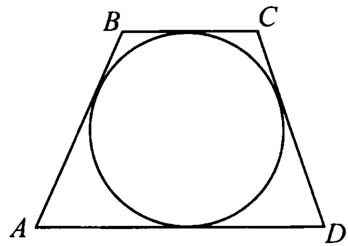


Рис. 138.

В любом вписанном четырёхугольнике сумма противоположных углов равна 180°.

$\angle BCD + \angle BAD = \angle CBA + \angle CDA = 180°$ (см. рис. 139).

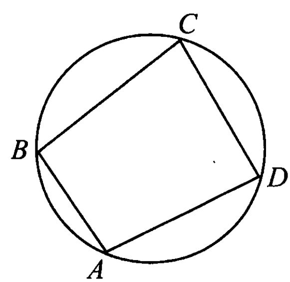


Рис. 139.

Если сумма противоположных углов четырёхугольника равна 180°, то около него можно описать окружность.

Задачи с решениями

25. В четырёхугольник вписана окружность (см. рис. 140). $AB = 10, CD = 8, BC = 5$. Найдите AD.

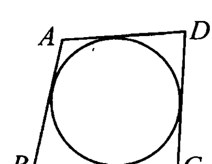


Рис. 140.

Решение.

Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Значит, $AB + CD = AD + BC$, то есть $10 + 8 = 5 + AD$, откуда $AD = 18 - 5 = 13$.

Ответ: 13.

❓ *Варианты для самостоятельного решения*

Вариант 1

1. Найдите периметр прямоугольного треугольника с катетами $AC = 9$ и $BC = 12$, $\angle ACB = 90°$ (см. рис. 141).

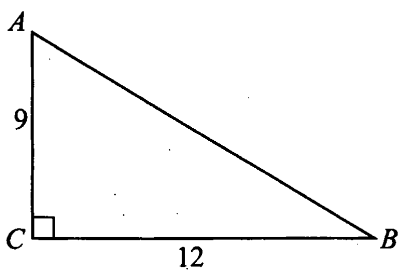


Рис. 141.

2. Найдите сторону B_1C_1 треугольника $A_1B_1C_1$, если $BC = 4$, $AB = A_1B_1 = AC = A_1C_1 = 3$ и $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$.

3. Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке 142.

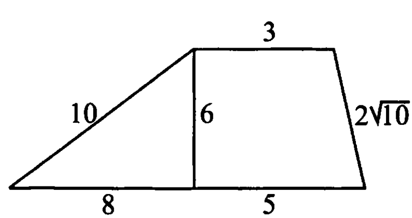


Рис. 142.

4. $ABCD$ — квадрат, вписанный в окружность, $BC = 6$. Найдите радиус окружности (см. рис. 143).

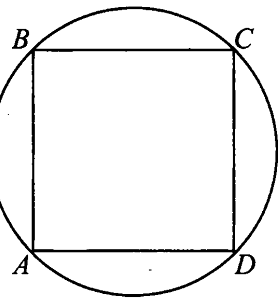


Рис. 143.

5. Укажите номера **не**верных утверждений.

1) Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

2) Если в четырёхугольнике противоположные стороны попарно параллельны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

3) Величина развёрнутого угла равна 90°.

4) Окружность и прямая могут иметь четыре общие точки.

5) Если в параллелограмме диагонали взаимно перпендикулярны, то этот параллелограмм — ромб.

6. Проектор полностью освещает экран A высотой 40 см, расположенный на расстоянии 120 см от проектора. На каком наименьшем расстоянии (в сантиметрах) от проектора нужно расположить экран B высотой 200 см, чтобы он был полностью освещён, если настройки проектора останутся неизменными (см. рис. 144)?

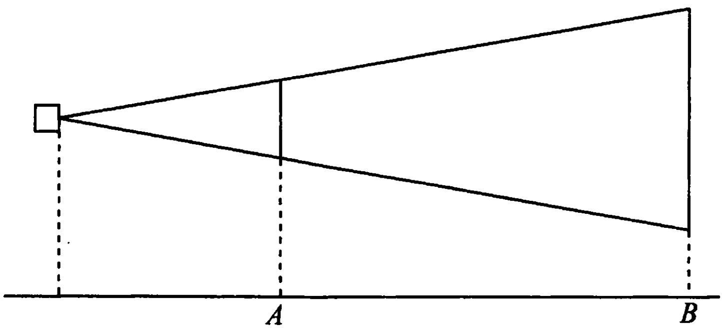


Рис. 144.

Вариант 2

1. Найдите сумму углов выпуклого шестиугольника (в градусах).

2. Найдите косинус внешнего угла при вершине A прямоугольного треугольника ABC, если $AC = 6$, $AB = 10$, $BC = 8$ (см. рис. 145).

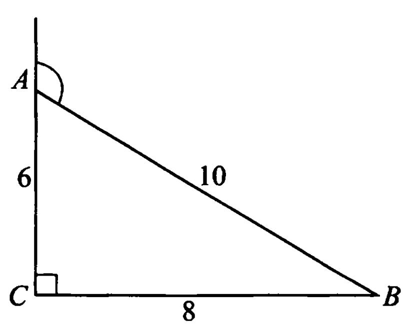


Рис. 145.

3. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$ (см. рис. 146).

4. Найдите BO, если O — точка пересечения медиан $\triangle ABC$, $AB = BC = 5$, $AC = 8$, медиана $BH = 3$ (см. рис. 147).

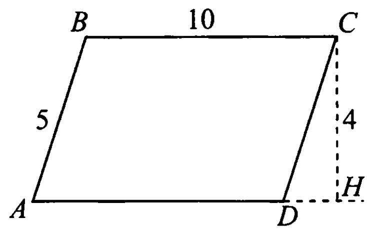


Рис. 146.

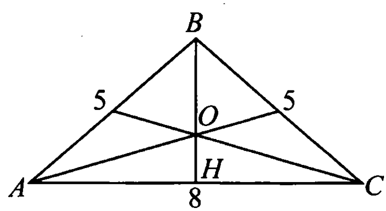


Рис. 147.

5. Укажите номера **не**верных утверждений.

1) В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

2) Сумма двух сторон треугольника больше третьей стороны.

3) Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на косинус угла между ними.

4) Если в параллелограмме диагонали равны, то этот параллелограмм — прямоугольник.

5) Если при пересечении двух параллельных прямых секущей сумма соответственных углов равна 180°, то такие прямые параллельны.

6. Проектор полностью освещает экран B высотой 240 см, расположенный на расстоянии 400 см от проектора. На каком наименьшем расстоянии (в сантиметрах) надо расположить экран A, высота которого 30 см, чтобы он был полностью освещён, если настройки проектора останутся неизменными (см. рис. 148)?

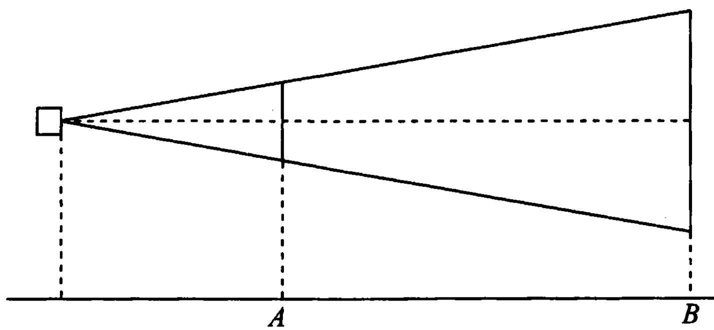


Рис. 148.

Вариант 3

1. Найдите угол ABD, если CB — биссектриса угла ABD и $\angle CBD = \frac{\pi}{6}$. Ответ укажите в радианах (см. рис. 149).

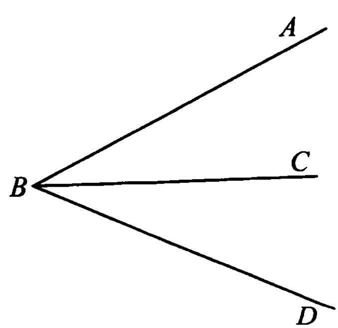


Рис. 149.

2. Найдите высоту CH трапеции $ABCD$ с основанием $AB = 10$, $CD = 6$, если площадь трапеции равна 24 (см. рис. 150).

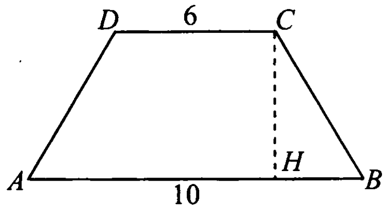


Рис. 150.

3. Найдите площадь параллелограмма $ABCD$ (см. рис. 151)

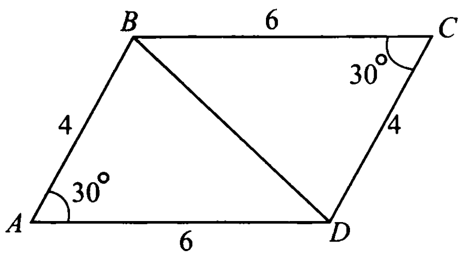


Рис. 151.

4. Прямая a касается в точке B окружности радиуса 3 с центром в точке O. Точка C лежит на прямой a и $CB = 4$. Найдите CO (см. рис. 152).

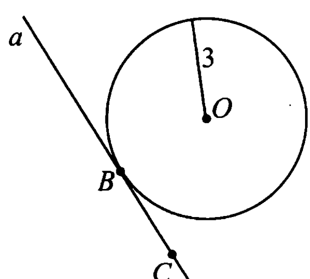


Рис. 152.

5. Укажите номера верных утверждений.

1) Если две прямые параллельны одной и той же прямой, то они параллельны.

2) Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

3) В треугольнике против большей стороны лежит больший угол.

4) Вокруг любого правильного многоугольника можно описать окружность.

5) Если углы при основании трапеции равны, то её боковые стороны тоже равны.

6. Человек стоит на расстоянии 5 шагов от фонарного столба и отбрасывает тень длиной 15 шагов. Определите высоту фонарного столба (в метрах), если рост человека 1,8 м (см. рис. 153).

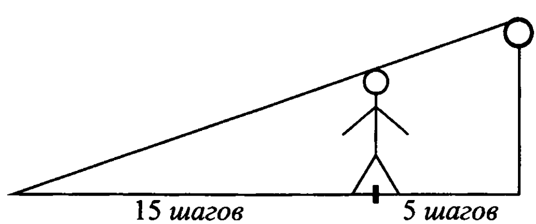


Рис. 153.

Вариант 4

1. Сколько радиан составляет угол в 80°?

2. Найдите $\angle ABC$ (в градусах), если $\angle BAD = 80°$, а $ABCD$ — параллелограмм (см. рис. 154).

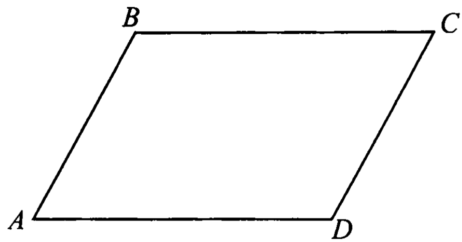


Рис. 154.

3. Найдите площадь треугольника, изображённого на рисунке 155.

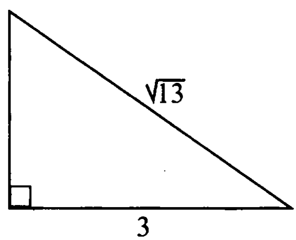


Рис. 155.

4. В трапеции $ABCD$ провели $BK = AB$ (см. рис. 156). Найдите $\angle BKD$, если $\angle BAD = 50°$. Ответ укажите в градусах.

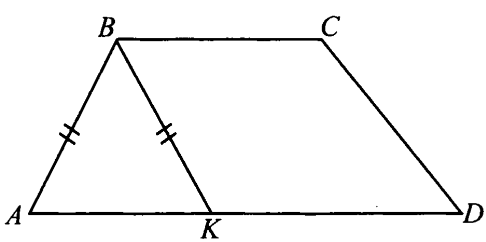


Рис. 156.

5. Укажите номера **не**верных утверждений.

1) Две прямые, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны.

2) В треугольнике против большего угла лежит меньшая сторона.

3) Медианы треугольника пересекаются в одной точке.

4) Прямые, содержащие высóты треугольника, пересекаются в одной точке.

5) Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла 30°, равен половине гипотенузы.

6. Проектор полностью освещает экран A высотой 360 см, расположенный на расстоянии 150 см от проектора. На каком наименьшем расстоянии (в сантиметрах) от проектора нужно расположить экран B высотой 480 см, чтобы он был полностью освещён, если настройки проектора остаются неизменными (см. рис. 157)?

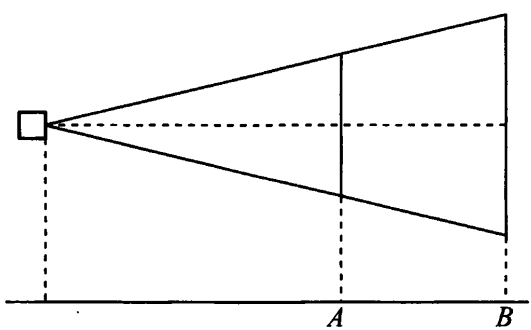


Рис. 157.

Вариант 5

1. Запишите значение угла $\frac{4\pi}{5}$ в градусах.

2. Найдите угол ACB (в градусах), если $a \parallel b$, а $\angle DBE = 60°$ (см. рис. 158).

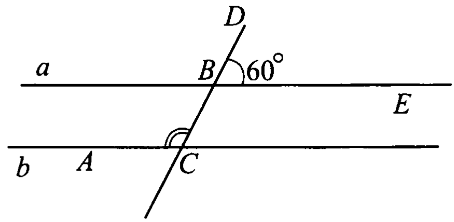


Рис. 158.

3. Найдите площадь $\triangle ABC$, изображённого на рисунке 159.

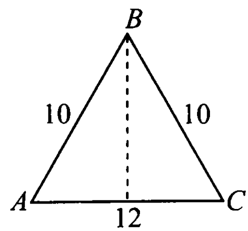


Рис. 159.

4. Найдите величину (в градусах) угла α (см. рис. 160).

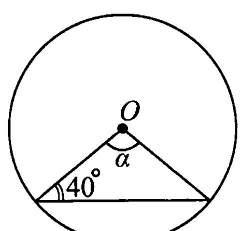


Рис. 160.

5. Укажите номера верных утверждений.

1) Две окружности могут пересекаться в трёх различных точках.

2) Средняя линия трапеции равна полусумме её оснований.

3) Сумма углов трапеции равна 180°.

4) Площадь квадрата равна квадрату его стороны.

5) Диагонали ромба равны.

6. Человек стоит на расстоянии 3 метров от фонарного столба высотой 3,4 м и отбрасывает тень длиной 3 метра. Найдите рост (в метрах) человека (см. рис. 161).

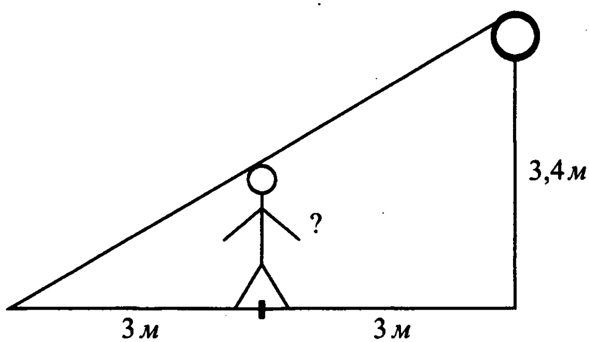


Рис. 161.

Вариант 6

1. Найдите катет BC прямоугольного треугольника ACB (см. рис. 162).

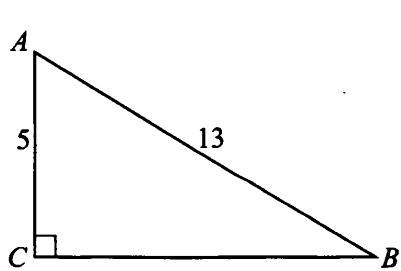


Рис. 162.

2. На рисунке 163 $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = 2$, $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$, $OB_3 = 9$. Найдите B_1B_2.

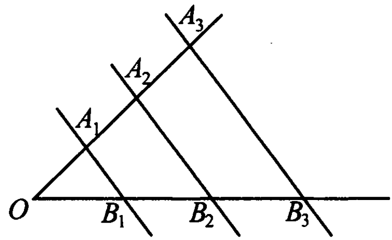


Рис. 163.

3. Найдите площадь сектора, ограниченного дугой AB, если радиус окружности равен 4, а величина вписанного угла, опирающегося на AB, равна 30° (см. рис. 164).

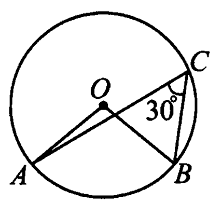


Рис. 164.

4. Найдите диагональ AC ромба $ABCD$, если сторона $AB = 5$, а диагональ $BD = 6$ (см. рис. 165).

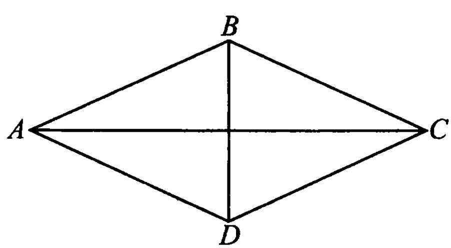


Рис. 165.

5. Укажите номера верных утверждений.

1) Сумма углов параллелограмма равна 360°.

2) В треугольник можно вписать окружность.

3) В любой прямоугольник можно вписать окружность.

4) Смежные углы равны.

5) Сумма вертикальных углов равна 180°.

6. Человек ростом 1,8 м стоит на расстоянии 10 м от фонарного столба и отбрасывает тень длиной 5 м. Определите высоту фонарного столба в метрах (см. рис. 166).

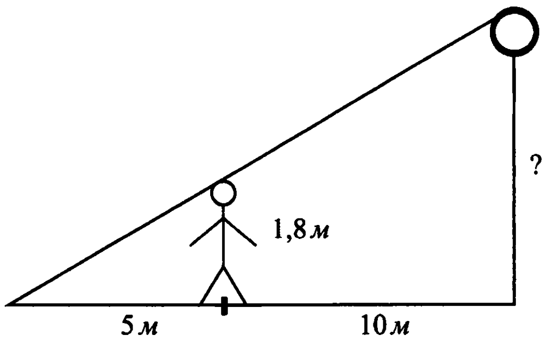


Рис. 166.

Глава 3. Статистика

ⓘ *Немного полезной информации*

Статистика — это отрасль знаний, изучающая общие вопросы сбора, измерения и анализа массовых данных. Математическая статистика занимается в основном анализом уже полученных данных.

Данные могут быть представлены графически, в виде ряда данных или в виде таблиц.

Графическое представление информации

Круговые диаграммы

Круговая диаграмма отображает целое в виде круга, а вклад нескольких элементов данных в виде секторов этого круга. Например, если в классе 30 человек, из которых 20 мальчиков и 10 девочек, то целое — это весь класс, мальчики — две трети целого, и девочки — одна треть целого (см. рис. 167).

Круговая диаграмма показывает долю каждой величины в общем объёме.

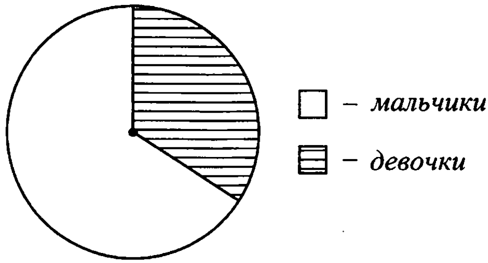


Рис. 167.

Задачи с решениями

1. Состав сплава массой 160 кг представлен на диаграмме (см. рис. 168). Сколько примерно олова содержится в этом сплаве?

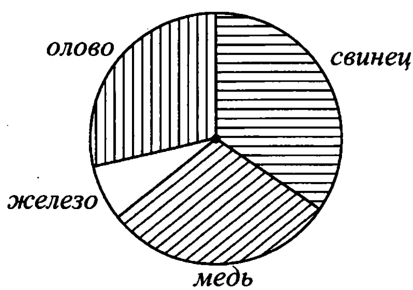


Рис. 168.

1) более 80 кг   2) около 40 кг

3) менее 20 кг   4) около 60 кг

Решение.

Как видно из рисунка, олово занимает примерно четверть круга, значит, верный ответ — около $\frac{1}{4} \cdot 160 = 40$ (кг).

Ответ: 2.

2. На диаграмме показано содержание белков, жиров и углеводов в сгущённом молоке (см. рис. 169). Определите по диаграмме, содержание каких веществ превосходит 50%.

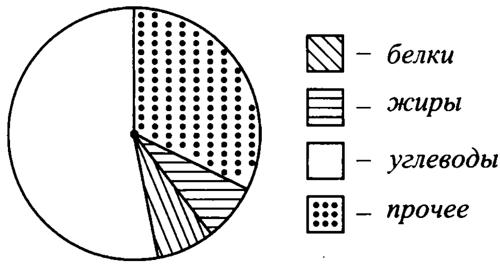


Рис. 169.

1) белки 2) жиры 3) углеводы 4) прочее

Решение.

Если содержание какого-то вещества более 50%, то соответствующий сектор должен занимать более половины круга. Как видно из рисунка, углеводы составляют более 50%.

Ответ: 3.

ⓘ *Немного полезной информации*

Столбчатые диаграммы

Столбчатые диаграммы изображают статистические данные в виде вертикальных прямоугольников.

Предположим, в январе Красная шапочка принесла бабушке 15 пирожков, в феврале — 10 и в марте — 17. Представим эти данные в виде столбчатой диаграммы (см. рис. 170).

Как видно из рисунка 170, для изображения величины какого-либо явления (в данном случае количества пирожков в каком-либо месяце) используется высота столбика.

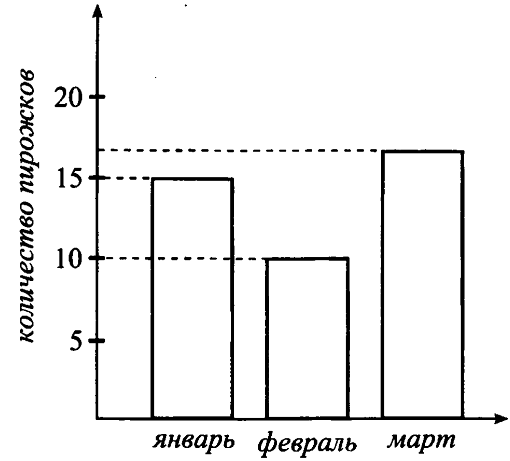


Рис. 170.

Задачи с решениями

3. На диаграмме (см. рис. 171) показано количество учащихся, прошедших тестирование по математике в некотором городе.

а) Определите номер школы, занявшей второе место по числу прошедших тестирование.

б) Определите, какое место по числу прошедших тестирование заняла 92-ая школа.

в) Определите, на сколько учеников больше прошли тестирование в школе 103, чем в школе 86.

Решение.

а) Как видно из рисунка 171, больше всех учеников (55 учеников) прошло тестирование в школе 45 (соответствующий этой школе столбик выше всех), следующая за ней школа — 1, в ней прошло тестирование 50 учеников.

б) Расположим количества учеников, соответствующих указанным школам, по убыванию: 55, 50, 40, 30, 25, 20. В

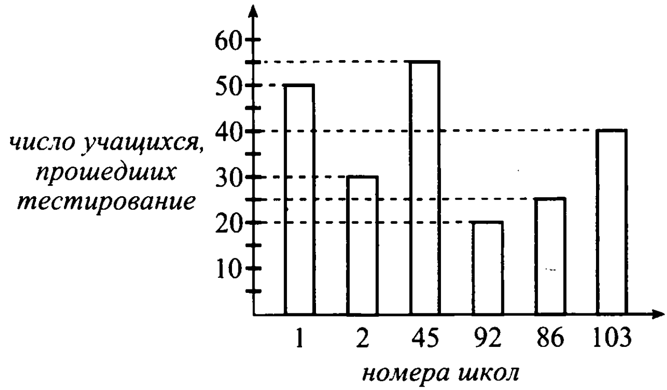


Рис. 171.

школе № 92 прошли тестирование 20 человек, значит, она на шестом месте.

в) Как видно из рисунка 171, в школе № 103 прошли тестирование 40 школьников, в школе № 86 — 25 школьников. Искомая разность равна $40 - 25 = 15$.

Ответ: а) 1; б) 6; в) 15.

ⓘ *Немного полезной информации*

Ряд данных и таблица распределения данных

Рядом данных называют результаты измерения, перечисленные в порядке их получения. Каждый из результатов называется **вариантой** измерения.

Например, результаты написания контрольной работы по математике для класса из 20 человек можно представить в виде следующего ряда данных: 3, 4, 4, 5, 3, 4, 3, 3, 3, 5, 5, 4, 5, 4, 5, 3, 3, 3, 4, 3. Эту же информацию можно представить в виде таблицы:

оценка	3	4	5
кратность	9	6	5

Кратность варианты — количество её повторений в ряду данных. В нашем ряду оценка «3» появилась 9 раз, поэтому её кратность равна 9.

Понятно, что таблица распределения отображает данные более наглядно и компактно.

Числовые характеристики данных

Объём измерения — количество всех данных этого измерения. Одна из наиболее важных характеристик варианты — это её частота. Частота варианты показывает долю этой варианты в ряду распределения. Она вычисляется по формуле $\textbf{частота} = \dfrac{\textbf{кратность варианты}}{\textbf{объём измерения}}$.

В нашем примере частота варианты «4» равна $\dfrac{6}{20} = 0{,}3$. Это означает, что оценка 4 составляет 0,3 всех полученных оценок.

Размах измерения — разность между максимальной и минимальной вариантами этого измерения. В нашем примере максимальная варианта равна 5, минимальная — 3, значит, размах равен $5 - 3 = 2$.

Мода измерения — варианта, которая в измерении встретилась чаще других. В приведённом выше примере чаще всех встретилась оценка 3, значит, она и будет модой этого распределения.

Медиана распределения — это центральное число в упорядоченном ряду данных, если в ряду нечётное количество чисел, или полусумма двух центральных, если в ряду чётное количество чисел.

Например, для ряда распределения 1, 2, 3, 6, 9, объём измерения которого равен 5, медианой распределения будет третье число этого ряда, то есть 3.

Для ряда распределения 7, 3, 2, 1 с объёмом измерения, равным 4, медианой будет полусумма двух центральных чисел данного ряда, то есть число, равное $\frac{2+3}{2} = 2{,}5$.

Для нахождения медианы распределения необходимо

1. Упорядочить ряд распределения по возрастанию или по убыванию: $a_1, a_2, \ldots$.

2. Если объём измерения нечётный, то есть $2n+1$, то получим следующую ситуацию:

$$\underbrace{a_1, a_2, \ldots, a_n}_{n\text{ значений}}, a_{n+1}, \underbrace{a_{n+2}, \ldots, a_{2n+1}}_{n\text{ значений}}$$

В этом случае медианой является число a_{n+1}.

3. Если объём измерения чётный, то есть $2n$, то имеем

$\underbrace{a_1, a_2, \ldots, a_n}_{n\text{ значений}}, \underbrace{a_{n+1}, \ldots, a_{2n}}_{n\text{ значений}}$ В этом случае медианой является число $\frac{a_n + a_{n+1}}{2}$.

Среднее ряда (среднее арифметическое) — сумма всех чисел ряда, делённая на их количество. Если имеется таблица распределения, то можно

1) умножить каждую варианту на её кратность;

2) просуммировать полученные значения;

3) разделить результат на объём измерения.

Например, для ряда распределения 2, 4, 6, 8, у которого объём измерения равен 4, среднее значение равно $\frac{2+4+6+8}{4} = \frac{20}{4} = 5$.

Задачи с решениями

4. Даны результаты измерения веса школьников 9 класса:

55, 53, 56, 48, 45, 56, 49, 52, 53, 49, 50, 56, 45, 52, 56, 45, 45, 48, 55, 52, 43, 48, 52, 49, 50, 45, 48, 45, 50, 53.

а) Постройте таблицу распределения данных.

б) Найдите объём измерения.

в) Найдите размах ряда.

г) Найдите частоту появления каждого веса в указанном ряду.

д) Найдите медиану, моду и среднее указанного ряда.

Решение.

а) Наименьшее число в ряду — 43, оно встречается в ряду один раз, значит, его кратность равна 1. Следующее по величине — число 45, оно встречается шесть раз, значит, его кратность равна 6. Далее 48, оно встречалось 4 раза, значит, его кратность равна 4.

Продолжая аналогично, заполним таблицу:

вес	43	45	48	49	50	52	53	55	56
кратность	1	6	4	3	3	4	3	2	4

б) Найти объём измерения можем несколькими способами.

1-й способ.

Посчитаем количество чисел в ряду, получим 30.

2-й способ.

Сложим кратности всех вариант:

$1 + 6 + 4 + 3 + 3 + 4 + 3 + 2 + 4 = 30.$

Ответ: 30.

в) Наибольшее значение в ряду 56, наименьшее — 43, значит, размах равен $56 - 43 = 13$.

Ответ: 13.

г) Для каждой варианты делим её кратность на объём измерения (на 30), результаты пишем в таблицу.

вес	43	45	48	49	50	52	53	55	56
кратность	1	6	4	3	3	4	3	2	4
частота	$\frac{1}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{3}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{4}{30}$

д) В данном ряду 30 чисел, значит, медиана равна полусумме 15-го и 16-го чисел в упорядоченном ряду.

$$\underbrace{43}_{\text{1 штука}},\ \underbrace{45,\ldots,45}_{\text{6 штук}},\ \underbrace{48,\ldots,48}_{\text{4 штуки}},\ \underbrace{49,\ldots,49}_{\text{3 штуки}},\ \underbrace{50,\ldots,50}_{\text{3 штуки}},\ \underbrace{52,\ldots,52}_{\text{4 штуки}}.$$

Как видно из такой записи чисел, от 43 до 49 — 14 чисел, значит, 15-ое и 16-ое числа равны 50, и значит, медиана равна $\frac{50 + 50}{2} = 50.$

Мода — то значение, которое встречается чаще всех, то есть то, у которого больше кратность. Из таблицы распределения находим, что наибольшую кратность имеет число 45, значит, мода равна 45.

Для нахождения среднего необходимо найти сумму всех чисел ряда. Можно это сделать просто складывая подряд все числа ряда. Можно поступить иначе: каждую варианту умножить на её кратность и сложить полученные результаты. Имеем $43 \cdot 1 + 45 \cdot 6 + 48 \cdot 4 + 49 \cdot 3 + 50 \cdot 3 + 52 \cdot 4 + 53 \cdot 3 + 55 \cdot 2 + 56 \cdot 4 = 1503$.

Осталось разделить на количество всех чисел: $\frac{1503}{30} = 50{,}1$.

Ответ: медиана: 50; мода: 45; среднее: 50,1.

5. Пятерых учеников попросили подсчитать, сколько времени (в минутах) они тратят на дорогу от дома до школы. Получили следующие результаты: 5, 15, 10, 15, 20.

1) Насколько среднее значение этого ряда меньше его размаха?

2) Насколько мода этого ряда больше медианы?

3) Найдите процентную частоту значения 10.

Решение.

1) Среднее ряда: $\frac{5 + 15 + 10 + 15 + 20}{5} = 13$, размах: $20 - 5 = 15$. Искомое значение равно $15 - 13 = 2$.

Ответ: 2.

2) Найдём медиану. Расположим числа в порядке возрастания: 5, 10, 15, 15, 20. Медианой этого набора будет третье число в упорядоченном ряду, то есть 15.

В данном ряду число 15 встретилось 2 раза, остальные — по одному разу. Мода ряда равна 15. Мода и медиана этого ряда равны, значит, ответ 0.

Ответ: 0.

3) Кратность значения 10 равна 1, объём измерения равен 5 (всего 5 чисел). Частота значения 10 равна $\frac{1}{5} = 0{,}2$, процентная частота равна $0{,}2 \cdot 100\% = 20\%$.

Ответ: 20.

6. Имеется 4 группы породистых котов. Для некоторого соревнования отбирают котов с длиной шерсти не менее 8 см.

Известно следующее:

1) в первой группе наибольшая длина шерсти равна 10 см;
2) во второй группе средняя длина шерсти равна 8 см;
3) в третьей группе мода длины шерсти равна 8 см;
4) в четвёртой группе медиана длины шерсти равна 9 см.

В какой из групп хотя бы половина котов гарантированно подходит по длине шерсти?

Решение.

1) Из того, что наибольшая длина шерсти равна 10 см, не следует никакой другой информации, то есть ничего не можем сказать про остальных котов этой группы.

2) Рассмотрим для примера группу котов с длинами шерсти 7 см, 7 см и 10 см. Среднее равно $\frac{7+7+10}{3} = 8$, но в этой группе нет половины котов, удовлетворяющих требованиям.

3) Рассмотрим для примера группу котов с шерстью длиной 8 см, 8 см, 7 см, 6 см, 5 см. Мода равна 8, но опять же нет половины котов, удовлетворяющих требованиям.

4) Если медиана равна 9 см, то есть половина котов с шерстью меньшей или равной длины и половина — с большей или

равной длины. Значит, в этой группе найдётся половина котов с шерстью длиной не менее 8 см.

Ответ: 4.

7. По статистике автозавода из 1000 машин в среднем 20 бракованных. Сколько бракованных машин следует ожидать, если завод собирается выпустить 300 500 машин?

Решение.

Если из 1000 машин 20 бракованных, то частота появления бракованной машины равна $\frac{20}{1000} = 0{,}02$. То есть доля бракованных машин будет равна 0,02, тогда из 300 500 машин будет $300\,500 \cdot 0{,}02 = 6010$ бракованных.

Ответ: 6010.

ⓘ *Варианты для самостоятельного решения*

Вариант 1

1. На диаграмме (см. рис. 172) показано распределение питательных веществ в сухом молоке.

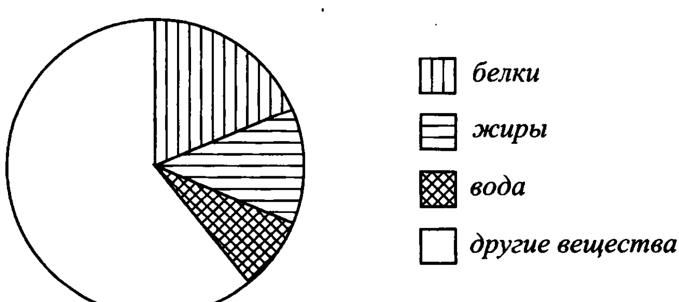


Рис. 172.

Определите, сколько примерно белков содержится в 100 г сухого молока.

1) более 65 г 2) около 50 г

3) около 35 г 4) около 20 г

2. Результаты контрольной работы по математике были представлены в виде ряда данных, по которому построена диаграмма (см. рис. 173).

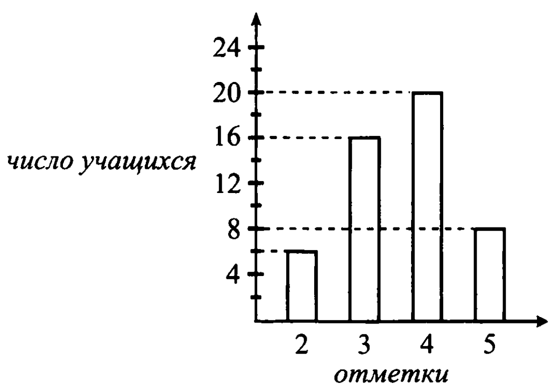


Рис. 173.

Найдите среднее значение исходного ряда данных.

3. Данные о числе мячей, забитых некоторой футбольной командой в разных матчах, представлены в виде ряда: 1, 2, 1, 0, 0, 3, 1, 2, 4, 0, 1, 0, 2, 1. Найдите моду этого ряда.

Вариант 2

1. На диаграмме (см. рис. 174) показано распределение питательных веществ в изюме.

Определите, сколько примерно углеводов содержится в 200 г изюма.

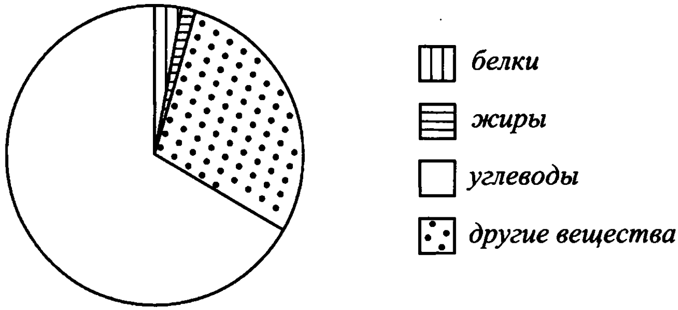


Рис. 174.

1) более 120 г 2) около 60 г

3) около 30 г 4) менее 15 г

2. Результаты контрольной работы по математике были представлены в виде ряда данных, по которому построена диаграмма (см. рис. 175).

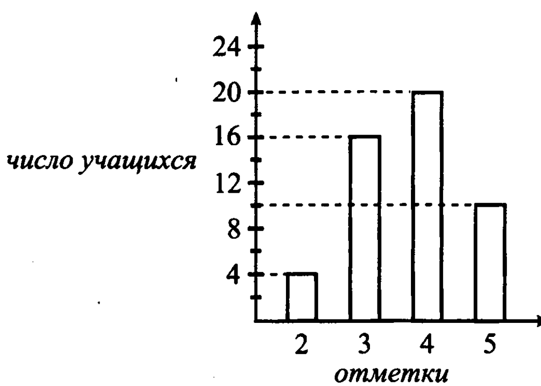


Рис. 175.

Найдите разность между медианой и размахом исходного ряда данных.

3. Данные о числе мячей, забитых некоторой футбольной командой в разных матчах, представлены в виде ряда: 3, 1, 0, 2, 5, 1, 4, 0, 0, 1. Найдите среднее значение этого ряда.

Вариант 3

1. На диаграмме (см. рис. 176) показано распределение лесных площадей в Брянской области.

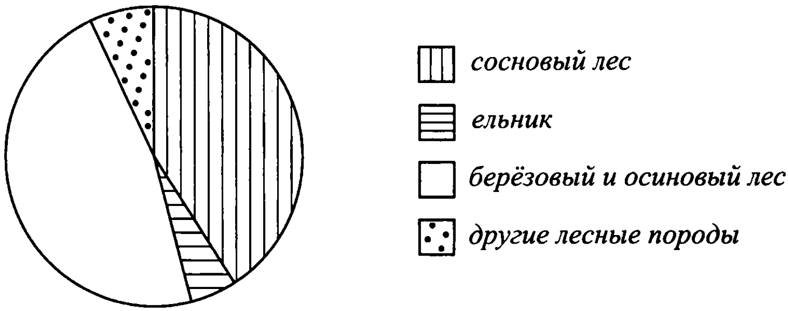


Рис. 176.

Определите, сколько примерно процентов лесных площадей Брянской области занимает ельник.

1) более 40% 2) около 20%
3) около 5% 4) менее 2%

2. Результаты сбора информации о зданиях некоторого посёлка были представлены в виде ряда данных, по которому построена диаграмма (см. рис. 177).

Найдите разность между медианой и модой исходного ряда данных.

3. Данные о числе мячей, забитых некоторой футбольной командой в разных матчах, представлены в виде ряда: 3, 2, 2, 0, 0, 1, 0, 2, 1, 1. Найдите объём измерения.

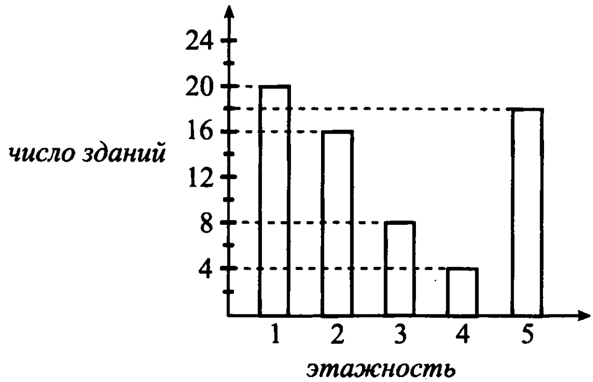


Рис. 177.

Вариант 4

1. На диаграмме (см. рис. 178) показано распределение лесных площадей в Уржумском районе Кировской области.

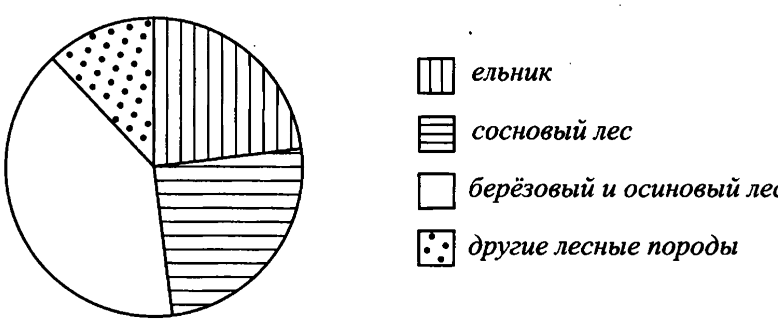


Рис. 178.

Определите, сколько примерно процентов лесных площадей в Уржумском районе занимают сосновые леса.

1) более 30% 2) около 25%

3) около 15% 4) менее 10%

2. Результаты сбора информации о зданиях некоторого посёлка были представлены в виде ряда данных, по которому построена диаграмма (см. рис. 179).

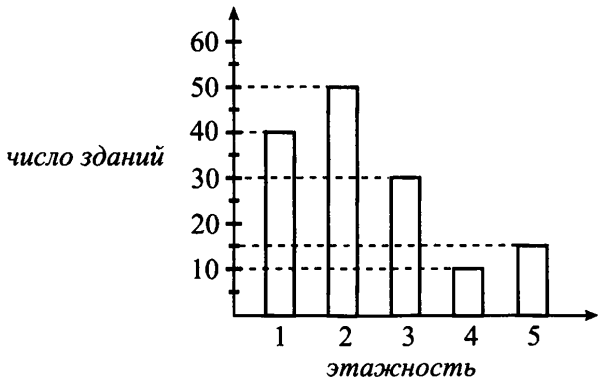


Рис. 179.

Найдите разность между медианой и модой исходного ряда данных.

3. Данные о числе нерабочих праздничных дней в России по месяцам представлены в виде ряда: 6, 1, 1, 0, 2, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0. Найдите среднее значение ряда.

Вариант 5

1. Сплав Вуда состоит из олова, свинца, висмута и кадмия. На диаграмме (см. рис. 180) показано содержание металлов в этом сплаве.

Определите, сколько примерно граммов свинца в сплаве Вуда массой 600 г.

1) более 200 г 2) около 150 г

3) около 100 г 4) менее 80 г

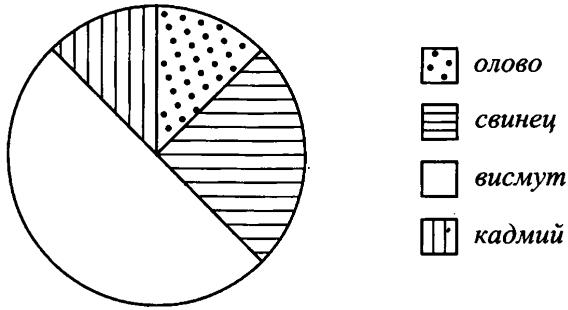


Рис. 180.

2. Результаты измерения веса (в кг) школьников 9-го класса представлены в виде таблицы распределения.

вес	44	45	47	49	50	52	53	54	55
кратность	2	4	3	3	5	3	1	2	3

Найдите объём измерения.

3. Данные о числе нерабочих праздничных дней в России по месяцам представлены в виде ряда: 6, 1, 1, 0, 2, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0. Найдите медиану ряда.

Вариант 6

1. На диаграмме (см. рис. 181) показано содержание химических элементов в сплаве Тинидур (разновидность стали).

Определите, сколько примерно граммов никеля в сплаве Тинидур массой 400 г.

1) около 200 г		2) около 120 г

3) около 60 г		4) менее 30 г

2. Результаты измерения веса (в кг) школьников 9-го класса были представлены в виде ряда, по которому построена таблица распределения.

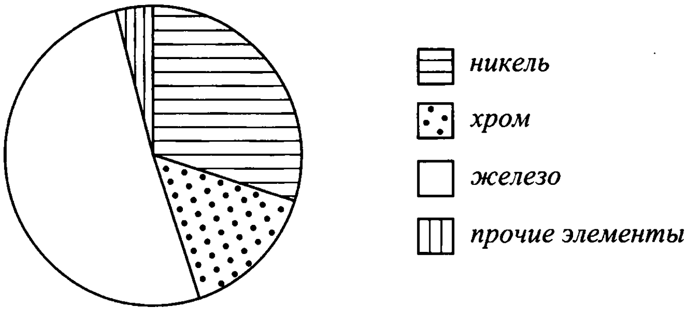


Рис. 181.

вес	45	46	47	48	50	51	53	54	55
кратность	1	4	2	4	6	2	1	3	2

Найдите размах исходного ряда.

3. Данные о числе нерабочих праздничных дней в России по месяцам представлены в виде ряда: 6, 1, 1, 0, 2, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 0. Найдите моду этого ряда.

Тренировочные тесты

Вариант 1

1. На рисунке 182 показано изменение температуры воздуха в городе L на протяжении трёх суток. По горизонтали указано время, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Найдите наибольшее значение температуры 23 марта. Ответ укажите в градусах Цельсия.

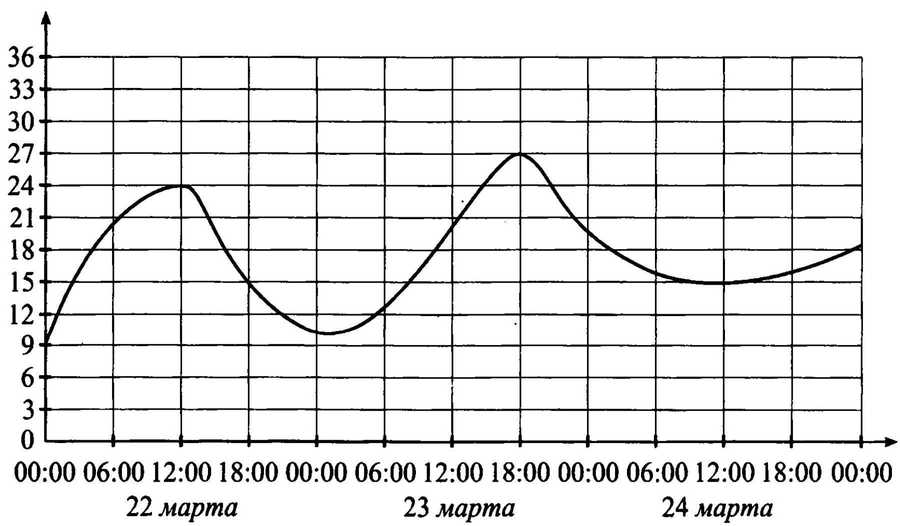


Рис. 182.

2. Два дерева находятся на расстоянии 24-х метров друг от друга. Высота одного растения — 22 метра, а другого — 12 метров. Найдите расстояние (в метрах) между их вершинами (см. рис. 183).

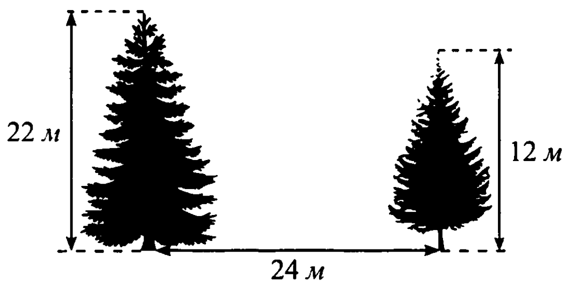


Рис. 183.

3. В трапеции $AB = BC = CD$, $AD = 2BC$ (см. рис. 184). Найдите угол, под которым пересекаются прямые, содержащие боковые стороны AB и CD. Ответ укажите в градусах.

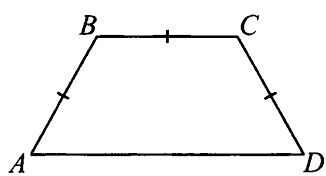


Рис. 184.

4. Школьный библиотекарь систематизировал имеющиеся в школе издания. Результаты представлены на круговой диаграмме (см. рис. 185).

Сколько примерно энциклопедий в школьной библиотеке, если всего в ней 4000 изданий?

1) более 1000	2) около 300
3) менее 50	4) около 500

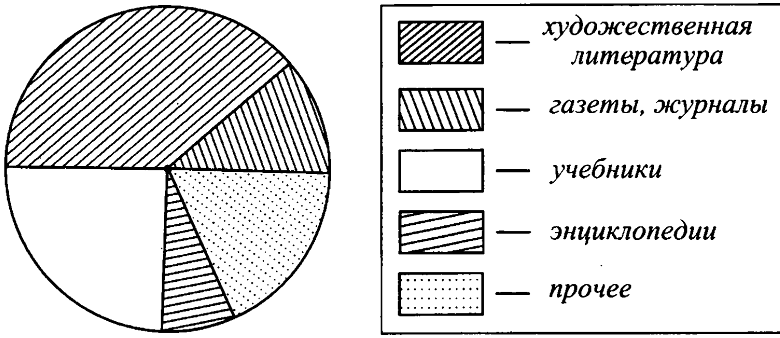


Рис. 185.

5. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают (см. рис. 186).

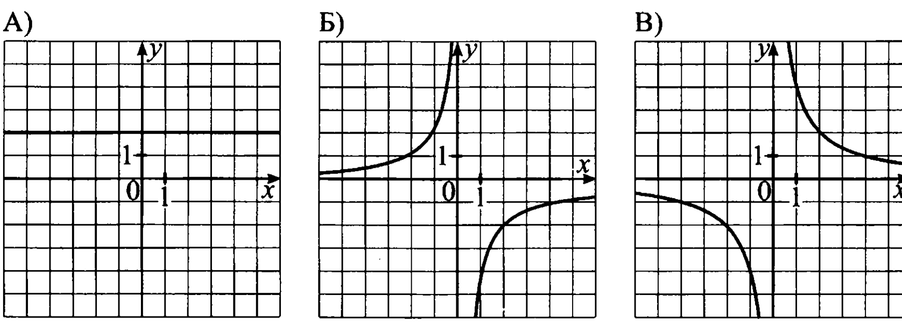


Рис. 186.

1) $y = \dfrac{4}{x}$ 2) $y = -\dfrac{2}{x}$ 3) $y = 2$ 4) $y = 2x$

Ответ:

А	Б	В

6. Найдите периметр трапеции, изображённой на рисунке 187.

7. Укажите номера верных утверждений.

1) Точка пересечения биссектрис треугольника — центр окружности, описанной около него.

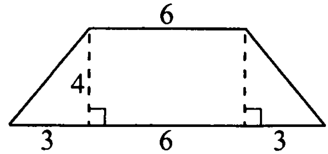


Рис. 187.

2) Сумма углов треугольника — 360°.

3) Диагонали ромба точкой пересечения делятся пополам.

4) Если противоположные стороны четырёхугольника попарно равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

5) Сумма углов трапеции — 360°.

8. На рисунке 188 изображены графики функций $y = x^2 - 4$ и $y = 2x + 4$. Найдите координаты точки B.

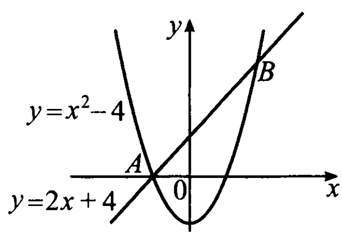


Рис. 188.

Вариант 2

1. На рисунке 189 жирными точками показано изменение стоимости акций одной из туристических компаний в первые две недели октября. Для наглядности жирные точки соединены линией. По оси абсцисс отложены числа месяца, по оси ординат — стоимость одной акции в рублях. Пётр купил 3 октября 300 акций, 100 акций продал 7 октября, 100 — 10 октября, а остальные — 11 октября. Сколько рублей потерял Пётр в результате этих операций?

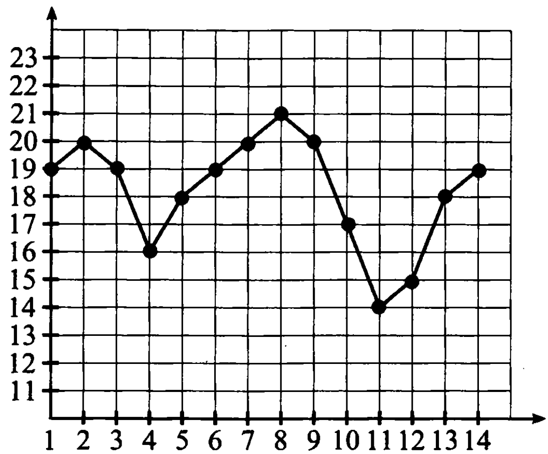


Рис. 189.

2. Угол раствора проектора равен 60°. На каком наименьшем расстоянии от проектора должен располагаться экран A высотой $3\sqrt{3}$ м, чтобы он был полностью освещён? Ответ укажите в метрах (см. рис. 190).

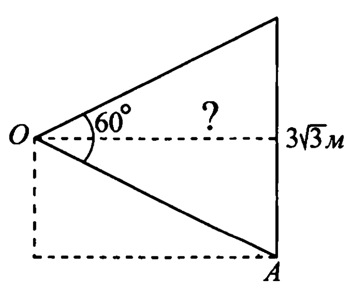


Рис. 190.

3. Две окружности с радиусами 8 и 2 касаются внешним образом. Найдите AB — отрезок на их общей внешней касательной, заключённый между точками касания (см. рис. 191).

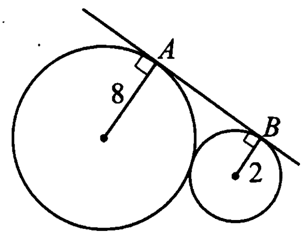


Рис. 191.

4. Петя в 3-й четверти получил такие оценки: 3, 3, 4, 3, 5, 4, 3, 4, 5, 5, 3, 4. Найдите частоту варианты 5.

5. Какой из графиков на рисунке 192 соответствует формуле $y = \dfrac{2}{x-1}$?

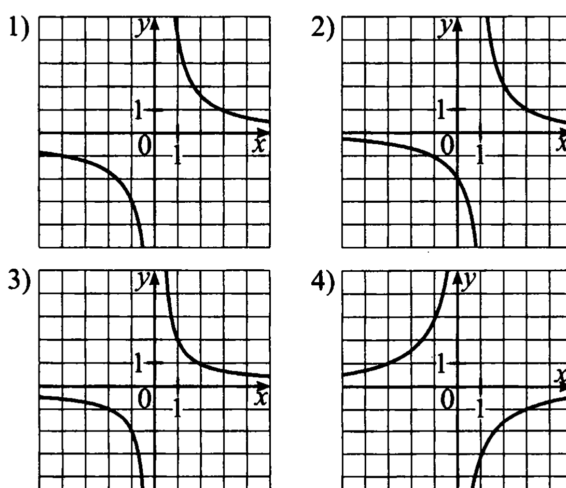


Рис. 192.

6. Найдите площадь трапеции, изображённой на рисунке 193.

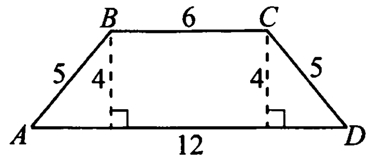


Рис. 193.

7. Укажите номера **не**верных утверждений.

1) Внешний угол треугольника равен сумме двух углов, не смежных с ним.

2) Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность.

3) Через любые четыре точки можно провести окружность.

4) При пересечении параллельных прямых секущей односторонние углы равны.

5) Градусная мера вписанного угла равна градусной мере дуги, на которую он опирается.

8. На рисунке 194 изображены графики функций $y = x - 1$, $y = 4 - x$, $y = 2x + 1$. Найдите координаты точки A.

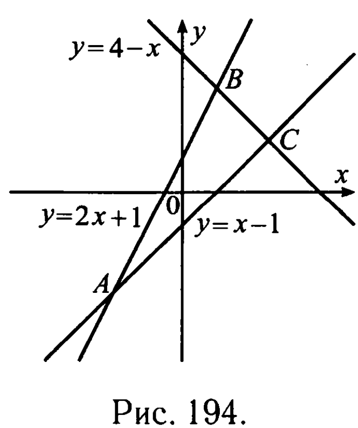


Рис. 194.

Вариант 3

1. На графике, изображённом на рисунке 195, жирными точками показано изменение стоимости акций одной из строительных компаний с 1 по 19 августа. По оси абсцисс отложены числа месяца, по оси ординат — стоимость одной акции в евро. Для наглядности жирные точки соединены линией. Бизнесмен приобрёл 6 августа 300 акций, а 15 августа их продал. Сколько евро он приобрёл в результате этих операций?

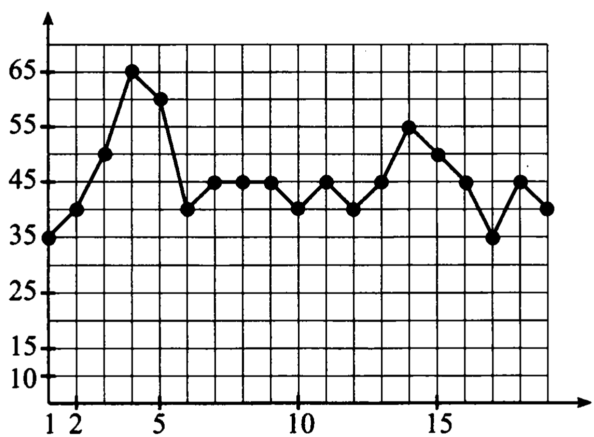


Рис. 195.

2. Проектор полностью освещает экран A высотой 80 см, расположенный на расстоянии 30 см от проектора. На каком наименьшем расстоянии от экрана A надо расположить экран B высотой 200 см ,чтобы он был полностью освещён, если настройки проектора остаются неизменными (см. рис.196)? Ответ выразите в сантиметрах.

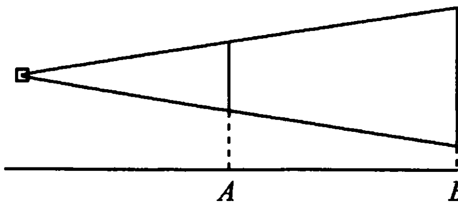


Рис. 196.

3. Две касательные к окружности пересекаются под углом 60°. A и B — точки касания, O — центр окружности (см. рис. 197). Найдите угол AOB. Ответ укажите в градусах.

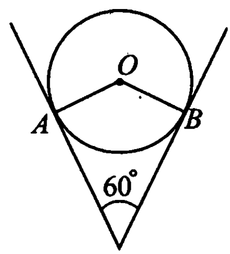


Рис. 197.

4. Во вторник к школьному стоматологу пришли несколько учеников. Врач выписал в соответствующем порядке классы пациентов и получил такой список: 9, 9, 8, 7, 6, 7, 8, 8, 9, 6, 5, 6, 8, 5. Найдите разность между модой и медианой этого ряда.

5. Укажите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают (см. рис. 198).

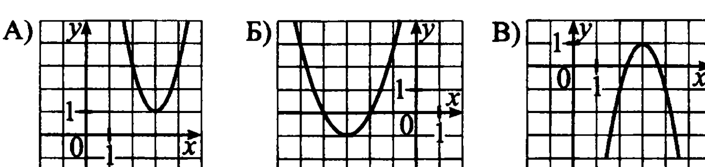


Рис. 198.

1) $y = (x+3)^2 - 1$

2) $y = 2x^2 - 12x + 19$

3) $y = \dfrac{2}{x}$

4) $y = -2(x-3)^2 + 1$

Ответ:

А	Б	В

6. Найдите периметр параллелограмма $ABCD$, изображённого на рисунке 199.

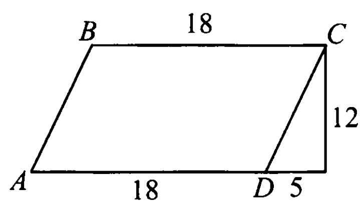


Рис. 199.

7. Укажите номера верных утверждений.

1) Если две прямые перпендикулярны одной и той же прямой, то они не пересекаются.

2) Гипотенуза прямоугольного треугольника равна сумме катетов.

3) Прямые, содержащие высóты треугольника, пересекаются в одной точке.

4) Катет, лежащий против угла в 60°, равен половине гипотенузы.

5) Площадь треугольника равна произведению всех его сторон, делённому на радиус описанной окружности.

8. На рисунке 200 изображены графики функций $y = x + 1$, $y = x$ и $y = 2x - 1$. Найдите координаты точки B.

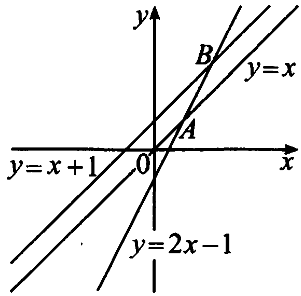


Рис. 200.

Вариант 4

1. На графике, изображённом на рисунке 201, показано изменение температуры воздуха в городе D в первые 4 дня июля. По горизонтали указывается время, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите разность между наибольшим и наименьшим значениями температуры за этот период. Ответ укажите в градусах Цельсия.

2. Проектор полностью освещает экран B высотой 150 см, расположенный на расстоянии 2 м от проектора. На каком наименьшем расстоянии от проектора надо расположить экран A высотой 60 см, чтобы он был полностью освещён, если настройки проектора остаются неизменными (см. рис. 202)? Ответ укажите в сантиметрах.

3. В треугольнике ABC $AB = BC = 5$, $AC = 6$. В него вписана окружность с центром в точке O. Найдите площадь треугольника AOC.

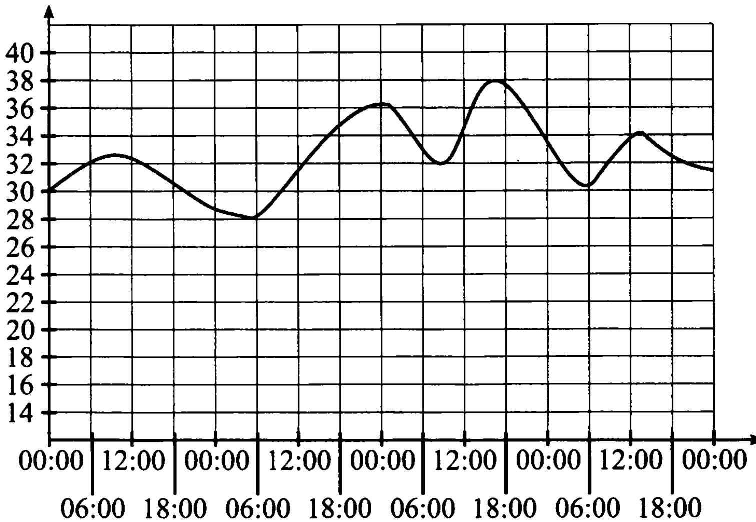


Рис. 201.

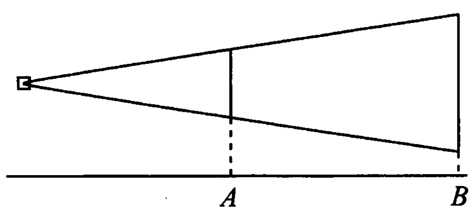


Рис. 202.

4. В учебнике по географии 25 параграфов. Костя выписал на лист бумаги ряд данных, состоящий из объёмов параграфов в страницах. Полученные результаты он представил в виде таблицы распределения данных.

Объём параграфа	9	7	6	5	1
Кратность	12	7	2	3	1

Найдите среднее этого ряда.

5. Какая из формул соответствует графику, представленному на рисунке 203?

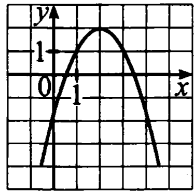


Рис. 203.

1) $y = (x-2)^2 + 2$ 2) $y = \dfrac{4}{x}$

3) $y = -x^2 + 4x - 2$ 4) $y = -x^2 + 2x + 2$

6. Найдите площадь параллелограмма, изображённого на рисунке 204.

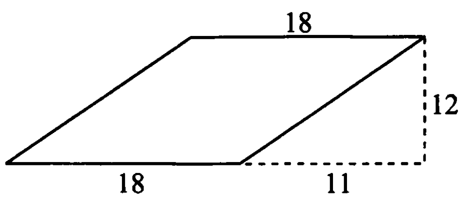


Рис. 204.

7. Укажите номера **не**верных утверждений.

1) В любую окружность можно вписать треугольник.

2) В любой квадрат можно вписать окружность.

3) Вокруг любого четырёхугольника можно описать окружность.

4) Биссектрисы углов треугольника делят каждый из его углов на 3 равные части.

5) Сумма углов правильного 5-угольника равна 540°.

8. На рисунке 205 изображены графики функций $y = x^2$ и $y = -x^2 + 2$. Найдите координаты точки A.

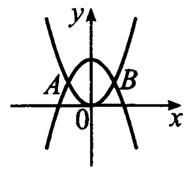


Рис. 205.

Вариант 5

1. В ходе химической реакции количество исходного вещества (реагента), которое ещё не вступило в реакцию, уменьшается со временем. На рисунке 206 эта зависимость представлена графиком. На оси абсцисс откладывается время в минутах, прошедшее с момента начала реакции, на оси ординат — масса (в граммах) реагента, не вступившего в реакцию. Определите по графику, сколько граммов реагента вступило в реакцию за первые 5 минут.

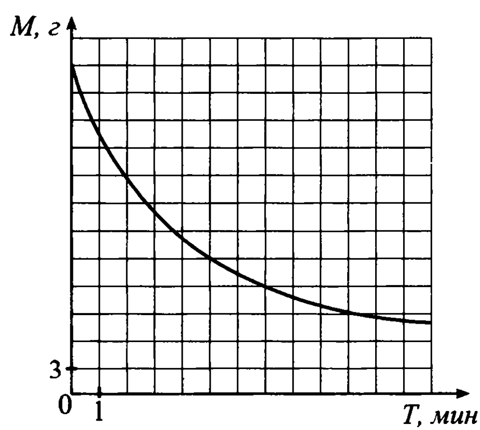


Рис. 206.

2. Человек стоит на расстоянии 3 шагов от фонарного столба, высота которого 2,8 м. Рост человека — 1,6 м. Определите длину его тени (в шагах).

3. Известно, что $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник, $\angle BAC = 100°$, $\angle BCD = 70°$, $BD = BC$, $AB = AD$ (см. рис. 207). Найдите $\angle ABC$. Ответ укажите в градусах.

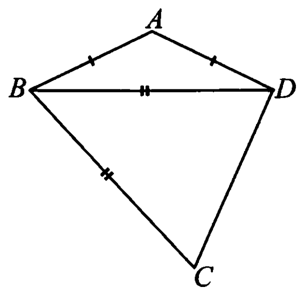


Рис. 207.

4. В книге по обществознанию цифры встречаются нечасто. Алексей выписал все цифры, которые встретились ему в тексте одного из параграфов. Он получил такую последовательность: 0, 2, 2, 1, 1, 2, 3, 7, 8, 1, 2,7, 7, 0. Найдите разность между размахом ряда и его модой.

5. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают (см. рис. 208).

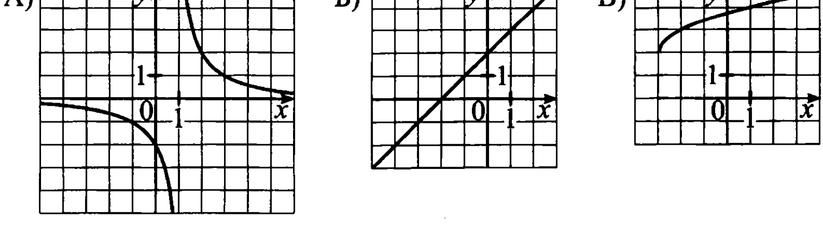


Рис. 208.

1) $y = x + 2$ 2) $y = \sqrt{x+3} + 2$

3) $y = \sqrt{x-3} + 2$ 4) $y = \dfrac{2}{x-1}$

Ответ:

А	Б	В

6. Найдите площадь ромба, изображённого на рисунке 209.

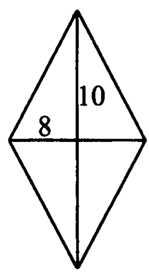


Рис. 209.

7. Укажите номера **не**верных утверждений.

1) Длина средней линии трапеции равна сумме её оснований.

2) Прямая является касательной к окружности, если пересекает её в двух точках.

3) Площадь параллелограмма равна произведению основания на высоту.

4) Биссектриса угла треугольника перпендикулярна стороне, противолежащей этому углу.

5) Площадь треугольника равна половине произведения периметра на радиус описанной окружности.

8. На рисунке 210 изображены графики функций $y = 2x$ и $y = \dfrac{8}{x}$. Найдите координаты точки A.

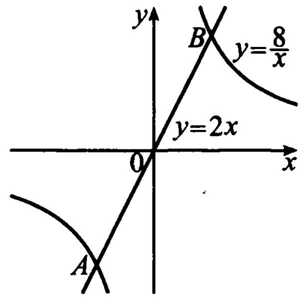


Рис. 210.

Вариант 6

1. На рисунке 211 показано, как изменялась скорость движения легковой машины на протяжении пяти часов. По горизонтали указано время в часах, по вертикали — скорость машины в км/ч. Найдите скорость машины через 2 часа после начала движения. Ответ выразите в км/ч.

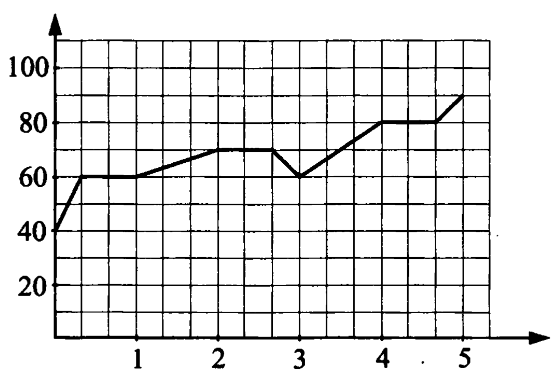


Рис. 211.

2. Найдите величину угла AOB (в градусах), если $\angle OAB = 40°$, O — центр окружности (см. рис. 212).

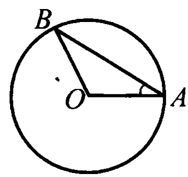


Рис. 212.

3. Найдите сторону BC треугольника ABC, если $\angle ABC = 90°$, $AC = 24$, $\angle BAC = 30°$.

4. На круговой диаграмме (см. рис. 213) показано распределение обучающихся некоторой школы по классам.

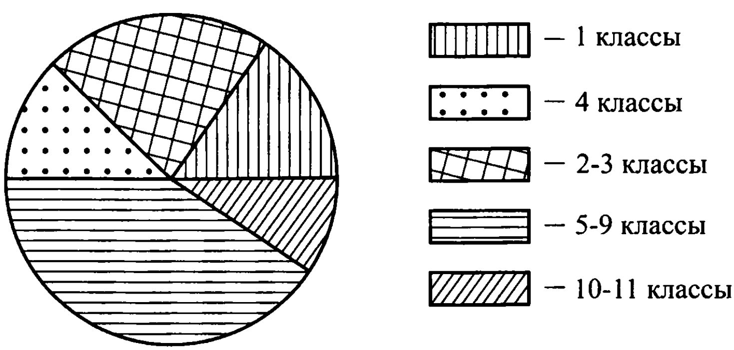


Рис. 213.

Каково примерное количество обучающихся в 5 – 9 классах, если всего в школе 1100 обучающихся?

1) менее 100 2) около 150

3) более 300 4) около 250

5. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают (см. рис. 214).

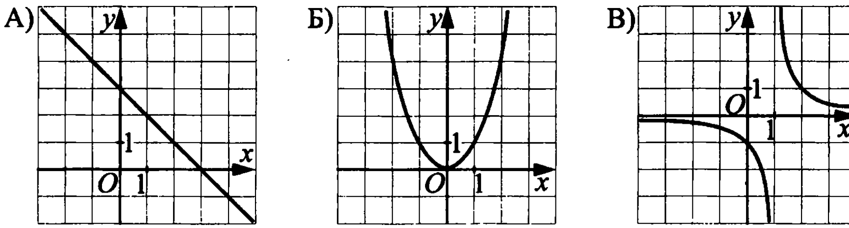


Рис. 214.

1) $y = \dfrac{2}{x}$ 2) $y = -x + 3$ 3) $y = \dfrac{1}{x-1}$ 4) $y = x^2$

Ответ:

А	Б	В

6. Найдите площадь трапеции, изображенной на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см (см. рис. 215). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

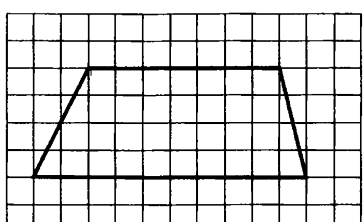


Рис. 215.

7. Укажите номера верных утверждений.

1) Ромб — это четырехугольник, у которого все углы прямые.
2) Если две параллельные прямые пересечены секущей, то сумма односторонних углов равна 180°.
3) В прямоугольном треугольнике гипотенуза меньше катета.
4) Если углы равны, то они вертикальные.

5) Если в четырехугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник — параллелограмм.

8. На рисунке 216 изображены графики функций $y = x^2 - 9$ и $y = 3x - 5$. Вычислите координаты точки A.

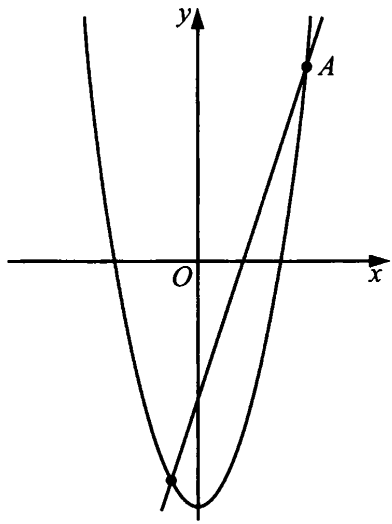


Рис. 216.

Вариант 7

1. На рисунке 217 показана зависимость между сроком хранения и температурой молока. По горизонтали указана температура молока в градусах Цельсия, по вертикали — время в часах.

Найдите срок хранения молока при температуре 10°C.

2. Найдите величину угла ABC (в градусах), если $\angle AOC = 110°$, O — центр данной окружности (см. рис. 218).

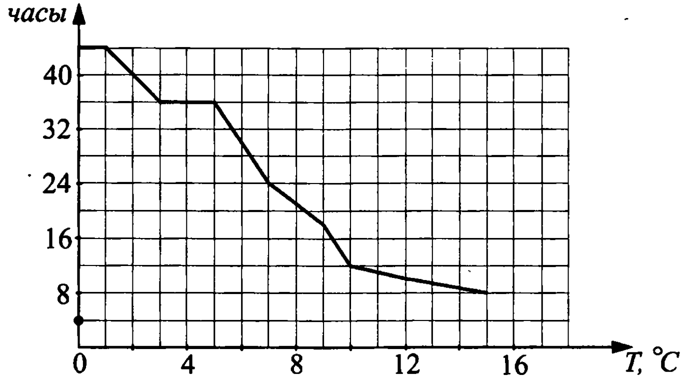


Рис. 217.

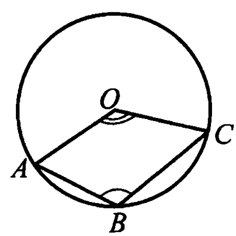


Рис. 218.

3. Найдите катет BC треугольника ABC, если $\operatorname{tg} \angle A = \frac{1}{\sqrt{3}}$, гипотенуза $AB = 10$.

4. На круговой диаграмме (см. рис. 219) представлены данные туристической фирмы о продажах путевок в различные страны за период лета 2009 года.

Какое примерное количество путевок было продано в страны Скандинавии, если общее количество проданных путевок за лето 2009 года составило 72 штуки?

1) около 10 2) около 30

3) около 20 4) более 40

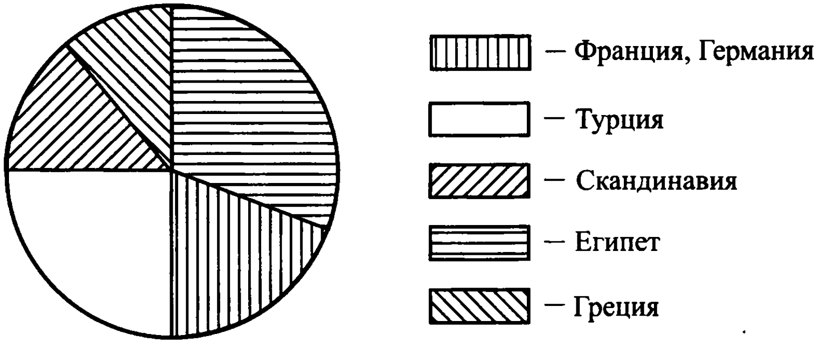


Рис. 219.

5. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают (см.рис. 220).

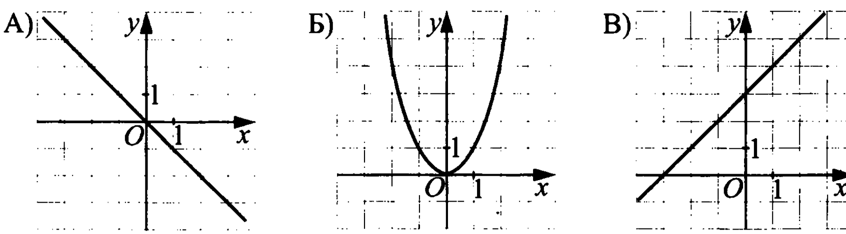


Рис. 220.

1) $y = x^2$ 2) $y = -x$ 3) $y = 3x$ 4) $y = x + 3$

Ответ:

А	Б	В

6. Найдите площадь равнобедренной трапеции, изображенной на рисунке 221.

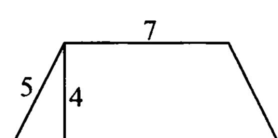


Рис. 221.

7. Укажите номера верных утверждений.

1) Отношение периметров подобных многоугольников равно коэффициенту подобия.

2) В равнобедренной трапеции диагонали не равны.

3) Сумма углов выпуклого четырехугольника равна 360°.

4) Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30°, равен гипотенузе.

5) Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей.

8. На рисунке 222 изображены графики функций $y = x^2$, $y = -x + 2$, $y = x + 6$. Вычислите координаты точки A.

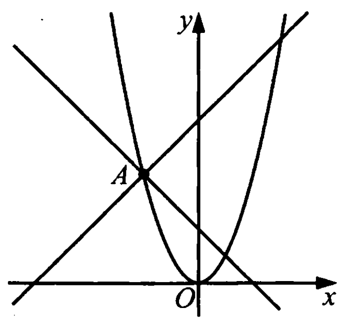


Рис. 222.

Вариант 8

1. На рисунке 223 показано, как изменялась температура воздуха на протяжении двух суток.

На оси абсцисс отмечается время суток в часах, на оси ординат — значение температуры в градусах Цельсия. Найдите разность между наибольшей и наименьшей температурами в течение этих двух суток. Ответ дайте в градусах Цельсия.

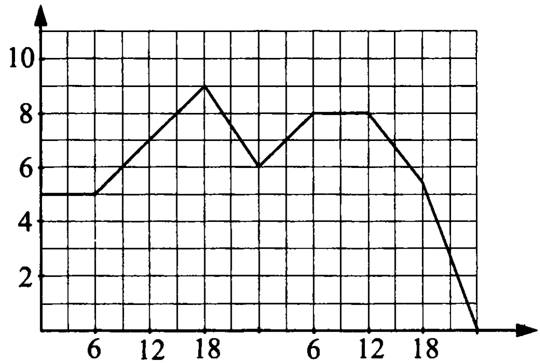


Рис. 223.

2. Найдите величину угла BAC, если $AB \| CD$ и $\smile AD = 40°$ (см. рис. 224). Ответ дайте в градусах.

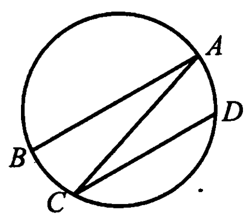


Рис. 224.

3. Найдите катет AC треугольника ABC, если $\cos \angle A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $AB = 6\sqrt{3}$.

4. На круговой диаграмме (см. рис. 225) представлены доли базовых общеобразовательных предметов в учебном плане старшей школы.

Сколько примерно часов в неделю отведено на изучение истории и обществознания, если недельный план составляет 37 часов?

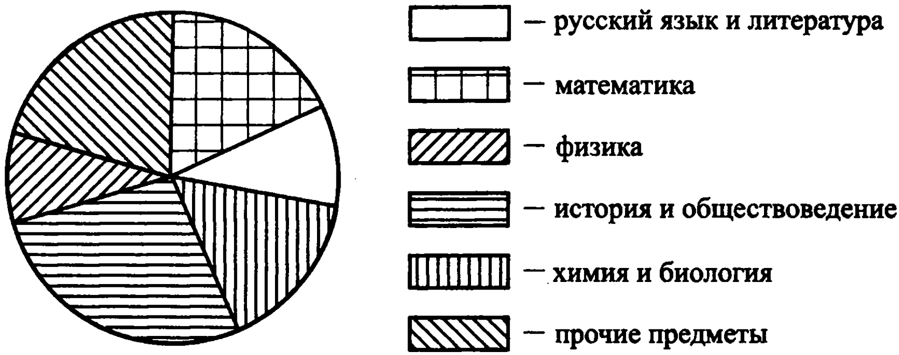


Рис. 225.

1) менее 5 2) около 10

3) около 15 4) более 20

5. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают (см.рис. 226).

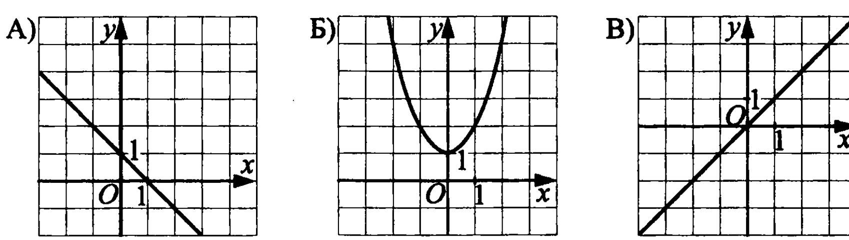


Рис. 226.

1) $y = 1 - x$ 2) $y = x^2 + 1$ 3) $y = \dfrac{2}{x}$ 4) $y = x$

Ответ:

А	Б	В

6. Найдите площадь треугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см×1 см (см. рис. 224). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

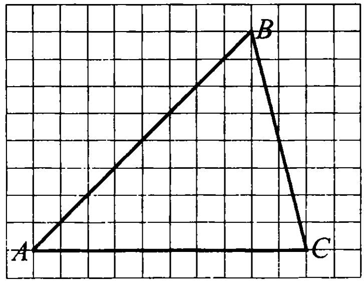


Рис. 227.

7. Укажите номера верных утверждений.

1) Высота, проведенная из вершины прямого угла треугольника, есть среднее арифметическое катетов.

2) Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

3) Сумма углов треугольника меньше 180°.

4) Синус угла в прямоугольном треугольнике — это отношение противолежащего катета к гипотенузе.

5) Вписанный угол окружности равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу.

8. На рисунке 228 изображены графики функций $y = -3$ и $y = x^2 - 2x - 3$. Вычислите координаты точки A.

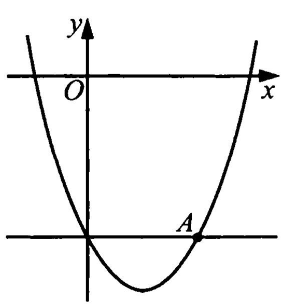


Рис. 228.

Вариант 9

1. На рисунке 229 показано, как изменялась скорость движения легковой машины на протяжении пяти часов. По горизонтали указано время в часах, по вертикали — скорость машины в км/ч. Найдите скорость машины через 4 часа 20 минут после начала движения. Ответ выразите в км/ч.

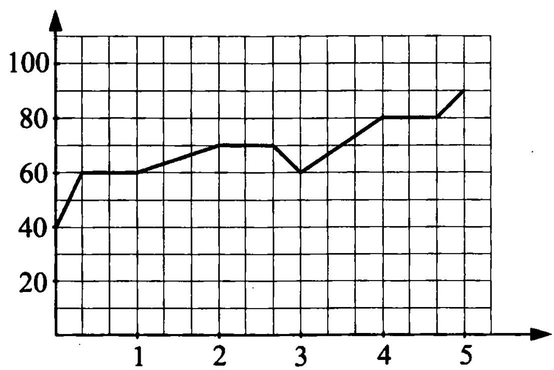


Рис. 229.

2. Найдите величину угла MON (в градусах), если $\angle MNP = 15°$, а точка O — центр данной окружности (см. рис. 230). Ответ выразите в градусах.

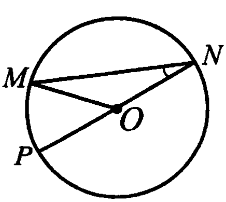


Рис. 230.

3. Найдите гипотенузу AC прямоугольного треугольника ABC, если $\sin\angle A = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $BC = 4\sqrt{2}$.

4. На круговой диаграмме (см. рис. 231) представлены доли базовых общеобразовательных предметов в 10-м классе.

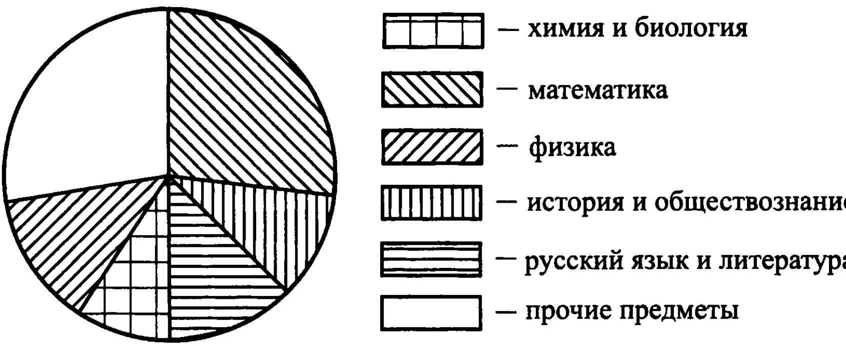


Рис. 231.

Сколько примерно часов в неделю отведено на изучение математики, если недельный план составляет 37 часов?

1) менее 7 2) около 10 3) около 15 4) более 20

5. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают (см.рис. 232).

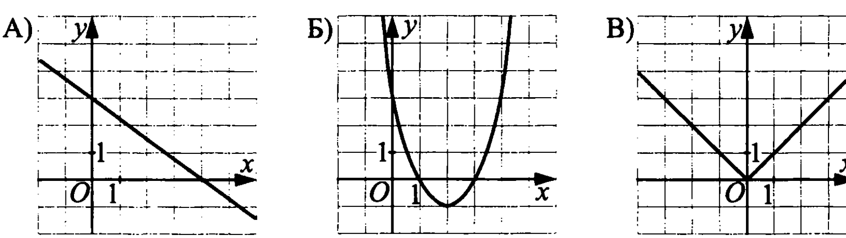


Рис. 232.

1) $y = (x-3)(x-1)$ 2) $y = |x|$

3) $y = -\frac{3}{4}x + 3$ 4) $y = 4x + 3$

Ответ:

А	Б	В

6. Найдите площадь параллелограмма, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см×1 см (см. рис. 230). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

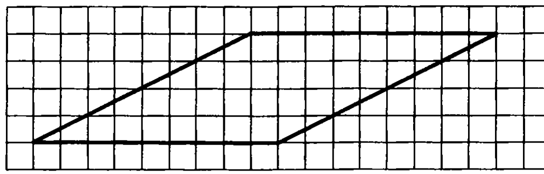


Рис. 233.

7. Укажите номера верных утверждений.

1) Медианы треугольника точкой пересечения делятся пополам.

2) Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

3) Центр описанной около треугольника окружности лежит в точке пересечения биссектрис углов треугольника.

4) Периметр параллелограмма равен удвоенной сумме двух смежных сторон.

5) Площадь треугольника равна произведению основания на проведённую к нему высоту.

8. На рисунке 234 изображены графики функций $y = x + 5$ и $y = (x - 1)^2$. Вычислите координаты точки A.

Вариант 10

1. На рисунке 235 показано, как изменялась температура воздуха в течение одного дня августа 2010 года в некотором городе. По горизонтали — время в часах, по вертикали — температура воздуха в градусах Цельсия. Определите по рисунку температуру воздуха (в градусах Цельсия) в 18.00.

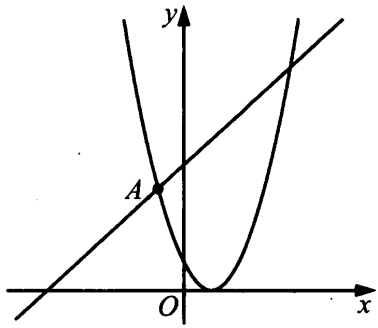


Рис. 234.

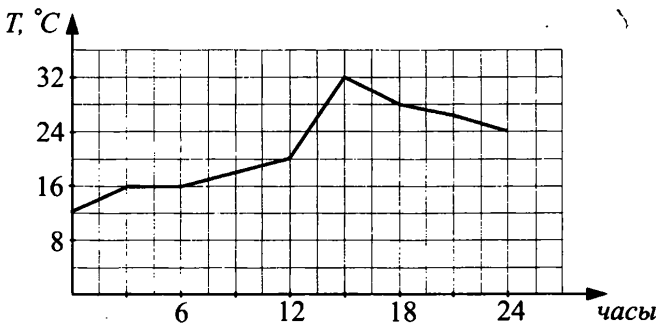


Рис. 235.

2. Найдите величину угла ABC (в градусах), если дуга AC равна 90° (см. рис. 236).

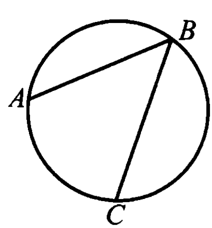


Рис. 236.

3. Найдите сторону AB треугольника ABC, если $\angle ADC = 60°$, $AC = 12$, $\angle DAC = 90°$ (см. рис. 237).

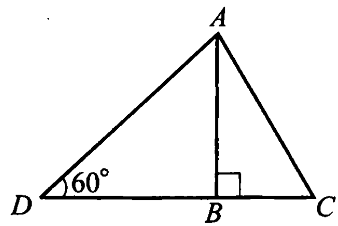


Рис. 237.

4. На круговой диаграмме (см. рис. 238) представлено содержание питательных веществ в овсяных хлопьях.

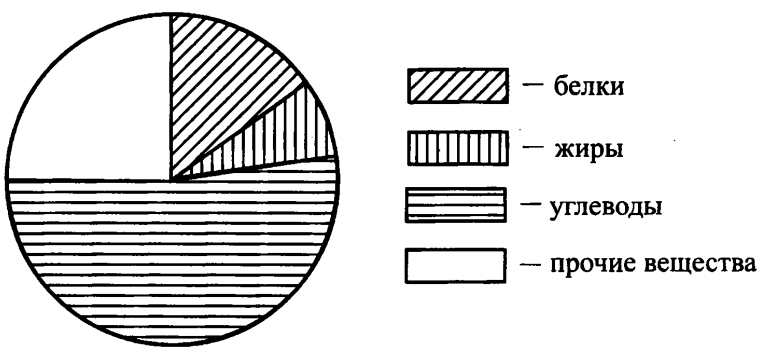


Рис. 238.

Сколько примерно граммов белка содержится в 100 г овсяных хлопьев?

1) около 30 2) менее 5 3) около 15 4) более 25

5. Установите соответствие между графиками функций и формулами, которые их задают (см. рис. 239).

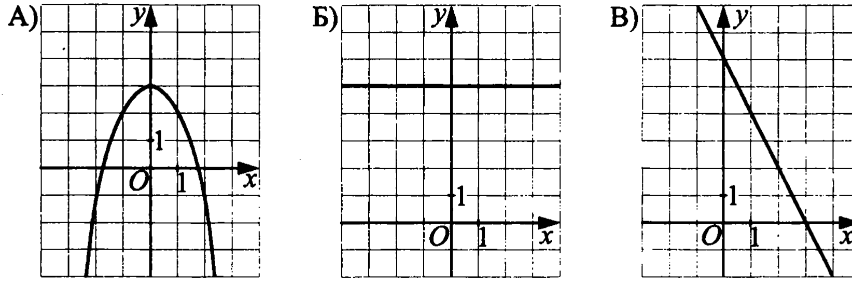


Рис. 239.

1) $y = -\frac{5}{x}$ 2) $y = -x^2 + 3$ 3) $y = -2x + 6$ 4) $y = 5$

Ответ:

А	Б	В

6. Найдите площадь трапеции $ABCD$ на рисунке 240.

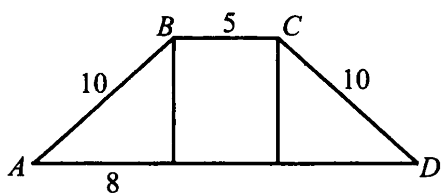


Рис. 240.

7. Укажите номера верных утверждений.

1) Параллелограмм — это четырехугольник, у которого стороны попарно параллельны.

2) В прямоугольнике все углы равны 80°.

3) Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту.

4) Градусная мера вписанного угла окружности равна градусной мере дуги, на которую он опирается.

5) Если в треугольнике два угла равны, то этот треугольник — равнобедренный.

8. На рисунке 241 изображены графики функций $y = x^2 + 1$, $y = 2x$, $y = -x + 3$. Вычислите координаты точки A.

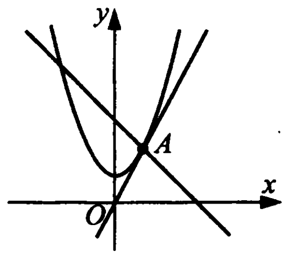


Рис. 241.

Ответы к вариантам для самостоятельного решения

Глава 1. Графики и функции

Номера вариантов	Номера заданий 1	2	3	4	5	6
1	413	$(-2;-1)$	20	432	$(2;-2)$	9
2	241	$(2;3)$	5	3	$(-0{,}5;2)$	120
3	314	$(-1;-4)$	12	3	$(3;1)$	4
4	423	$(4;0)$	2	213	$(-2;-3)$	54
5	321	$(2;9)$	80	2	$(-1;-3)$	18
6	412	$(2;-5)$	1,2	134	$(-2;1)$	30

Глава 2. Планиметрия

Номера вариантов	Номера заданий 1	2	3	4	5	6
1	36	4	48	$3\sqrt{2}$	34	600
2	720	$-0{,}6$	40	2	35	50
3	$\frac{\pi}{3}$	3	12	5	1345	2,4
4	$\frac{4\pi}{9}$	100	3	130	2	200
5	144	120	48	100	24	1,7
6	12	3	$\frac{8\pi}{3}$	8	12	5,4

Глава 3. Статистика

Номера вариантов		Номера заданий 1	2	3
	1	4	3,6	1
	2	1	1	1,7
	3	3	1	10
	4	2	0	1
	5	2	26	0,5
	6	2	10	0

Ответы к тренировочным тестам

Номера вариантов		Номера заданий 1	2	3	4	5	6	7	8
	1	27	26	60	2	321	28	345	(4; 12)
	2	600	4,5	8	0,25	2	36	345	(−2; −3)
	3	3000	45	120	0,5	214	62	13	(2; 3)
	4	10	80	4,5	7,4	3	216	34	(−1; 1)
	5	21	4	80	6	412	160	1245	(−2; −4)
	6	70	100	12	3	243	34	25	(4; 7)
	7	12	125	5	1	214	40	135	(−2; 4)
	8	9	20	9	2	124	40	245	(2; −3)
	9	80	150	8	2	312	36	24	(−1; 4)
	10	28	45	6	3	243	78	135	(1; 2)

ГИА-9

Учебное издание

МАТЕМАТИКА
БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ ГИА-9
ПОСОБИЕ ДЛЯ «ЧАЙНИКОВ»
Часть 2

Под редакцией ***Ф.Ф. Лысенко, С.Ю. Кулабухова***

Налоговая льгота: издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Обложка *А. Вартанов*
Компьютерная верстка *Г. Безуглова*
Корректор *Н. Пимонова*

Подписано в печать с оригинал-макета 13.09.2012.
Формат $60x84^1/_{16}$. Бумага типографская.
Гарнитура Ньютон. Печать офсетная. Усл. печ. л. 9,3.
Доп. тираж 10000 экз. Заказ № 33344.

Издательство ООО «Легион» включено в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, которые допускаются к использованию в образовательном процессе в имеющих государственную аккредитацию и реализующих образовательные программы общего образования образовательных учреждениях. Приказ Минобрнауки России № 729 от 14.12.2009, зарегистрирован в Минюст России 15.01.2010 № 15987.

ООО «ЛЕГИОН»
Для писем: 344000, г. Ростов-на-Дону, а/я 550.
Адрес редакции: 344011, г. Ростов-на-Дону, пер. Доломановский, 55.
www.legionr.ru e-mail: legionrus@legionrus.com

Отпечатано в соответствии с качеством предоставленных издательством электронных носителей в ОАО «Саратовский полиграфкомбинат».
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59. www.sarpk.ru